

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Кафедра «Прикладная математика-1»

Е.Б.Арутюнян, Е.В.Родина

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания
для студентов
направлений УВА, УЗС, УИС, УПИ, УЭМ

Москва – 2013

УДК.....

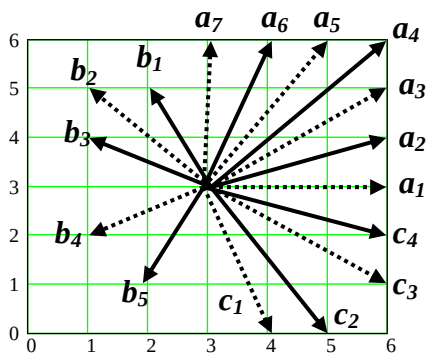
Арутюнян Е.Б., Родина Е.В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Методические указания для студентов направлений УВА, УЗС, УИС, УПИ, УЭМ. М. :МИИТ, 2013. – 125 с.

Сборник содержит задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов по темам: «Векторная алгебра», «Прямая на плоскости», «Кривые второго порядка», «Прямые и плоскости в пространстве», «Матрицы, определители, системы линейных уравнений», «Линейные пространства, линейные преобразования». По каждому типу заданий приведены образцы подробных решений. Сборник предназначен для направлений УЭМ, УЗС (курс «Математика»), УПИ (курс «Алгебра и геометрия»), УВА, УИС (курс «Алгебра») в первом и втором семестрах.

©Московский государственный
университет путей сообщения
2013

Тема 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Задание 1. Постройте на плоскости векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$, являющиеся линейными комбинациями заданных векторов.



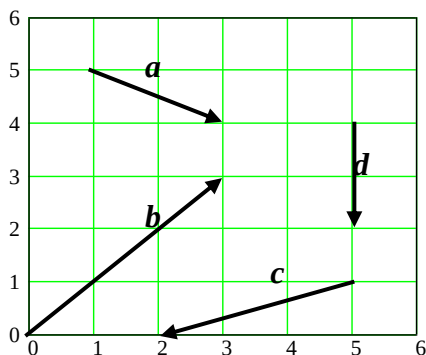
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 1.

Номер варианта	Вектор $\mathbf{n}$	Вектор $\mathbf{m}$
1	$\mathbf{n} = -\frac{2}{3}\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{b}_1 - 1\frac{2}{3}\mathbf{b}_5$	$\mathbf{m} = \sqrt{2}\mathbf{a}_1$
2	$\mathbf{n} = 2\mathbf{a}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{b}_1 + 1\frac{1}{3}\mathbf{c}_1$	$\mathbf{m} = -\sqrt{3}\mathbf{a}_2$
3	$\mathbf{n} = 0.5\mathbf{a}_3 - 1\frac{1}{4}\mathbf{b}_3 + \frac{2}{3}\mathbf{a}_7$	$\mathbf{m} = -\sqrt{2}\mathbf{a}_3$
4	$\mathbf{n} = -\frac{3}{4}\mathbf{a}_4 + 2\mathbf{c}_4 - 1\frac{2}{3}\mathbf{b}_2$	$\mathbf{m} = \sqrt{3}\mathbf{b}_1$
5	$\mathbf{n} = 1.5\mathbf{a}_5 - \frac{3}{4}\mathbf{c}_3 + 2\mathbf{b}_3$	$\mathbf{m} = -\sqrt{5}\mathbf{b}_2$
6	$\mathbf{n} = -\frac{2}{3}\mathbf{a}_6 + 2\mathbf{b}_3 + 2\frac{1}{4}\mathbf{b}_5$	$\mathbf{m} = \sqrt{5}\mathbf{b}_3$

7	$n = 1\frac{2}{3}a_7 - 0,5b_3 - \frac{1}{4}c_4$	$m = \sqrt{2}c_1$
8	$n = 1,5a_1 - \frac{2}{3}b_2 - c_1$	$m = -\sqrt{2}c_2$
9	$n = -0,5a_2 + \frac{1}{3}b_5 - 1\frac{1}{3}c_4$	$m = -\sqrt{3}c_3$
10	$n = 2a_3 + 0,5c_3 - 1\frac{2}{3}b_1$	$m = \sqrt{3}b_5$
11	$n = -\frac{2}{3}a_2 + 2c_3 + 1\frac{2}{3}b_4$	$m = \sqrt{2}a_4$
12	$n = 2a_3 - \frac{1}{3}c_4 + 1\frac{1}{3}b_2$	$m = -\sqrt{3}a_5$
13	$n = 0,5a_4 - 1\frac{1}{4}c_2 + \frac{2}{3}b_5$	$m = -\sqrt{2}a_6$
14	$n = -\frac{3}{4}a_5 + 2b_3 - 1\frac{2}{3}c_1$	$m = \sqrt{3}b_4$
15	$n = 1,5a_6 - \frac{3}{4}b_1 + c_2$	$m = -\sqrt{5}b_5$
16	$n = -\frac{2}{3}a_7 + 2a_3 + 1\frac{1}{4}b_5$	$m = \sqrt{5}b_1$
17	$n = 1\frac{2}{3}a_1 - 0,5b_1 - \frac{1}{4}b_5$	$m = \sqrt{2}a_7$
18	$n = 1,5a_2 - \frac{2}{3}a_4 - b_5$	$m = -\sqrt{2}a_2$
19	$n = -0,5a_3 + \frac{1}{3}c_3 - 1\frac{1}{3}b_4$	$m = -\sqrt{3}a_3$
20	$n = 2b_4 + 0,5a_7 - 1\frac{1}{3}b_1$	$m = \sqrt{3}a_5$
21	$n = \frac{2}{3}a_1 - 2b_1 + 1\frac{2}{3}b_5$	$m = \sqrt{2}a_2$

22	$n = -2a_2 + \frac{1}{3}b_1 - 1\frac{1}{3}c_1$	$m = -\sqrt{3}a_1$
23	$n = -0,5a_3 - \frac{2}{3}a_7 + 1\frac{1}{4}b_3$	$m = -\sqrt{2}a_1$
24	$n = \frac{3}{4}a_4 + 1\frac{2}{3}b_2 - 2c_4$	$m = \sqrt{3}b_3$
25	$n = -1,5a_5 - 2b_3 + \frac{3}{4}c_3$	$m = -\sqrt{5}b_1$
26	$n = -\frac{2}{3}a_6 - 2b_3 - 2\frac{1}{4}b_5$	$m = \sqrt{5}b_2$
27	$n = -1\frac{2}{3}a_7 + 0,5b_3 + \frac{1}{4}c_4$	$m = \sqrt{2}c_2$
28	$n = -1,5a_1 + \frac{2}{3}b_2 + c_1$	$m = -\sqrt{2}c_1$
29	$n = 0,5a_2 - \frac{1}{3}b_5 + 1\frac{1}{3}c_4$	$m = -\sqrt{3}b_3$
30	$n = -2a_3 + 1\frac{2}{3}b_1 - 0,5c_3$	$m = \sqrt{3}a_1$

Пример. Даны векторы a, b, c, d :



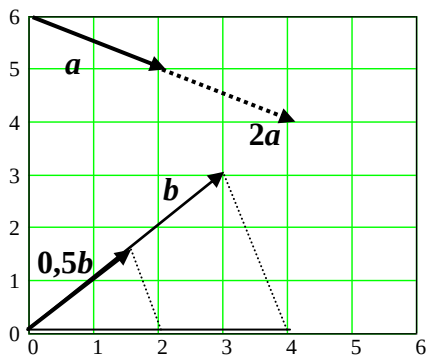
Постройте на плоскости векторы n и m :

$$n = 2a + 0,5b - \frac{2}{3}c - 1\frac{1}{3}d, \quad m = \sqrt{3}a.$$

Решение.

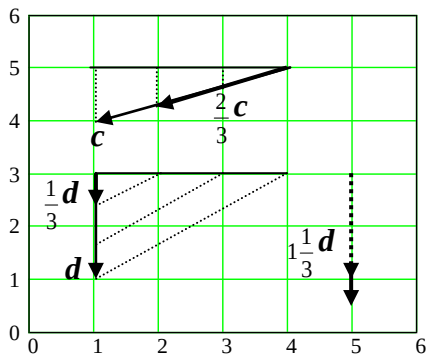
1) Построение вектора n .

Сначала построим векторы $2a$, $0,5b$, $\frac{2}{3}c$ и $1\frac{1}{3}d$.



Для увеличения длины вектора a в k раз ($k \in \mathbb{N}$) необходимо на прямой, параллельной этому вектору, отложить k длин вектора a .

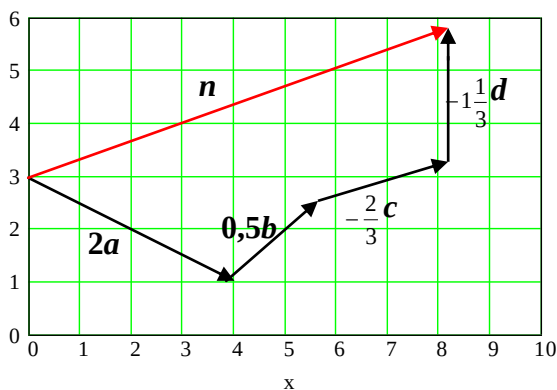
Для уменьшения длины вектора b в k раз ($k \in \mathbb{N}$) удобно воспользоваться теоремой Фалеса:



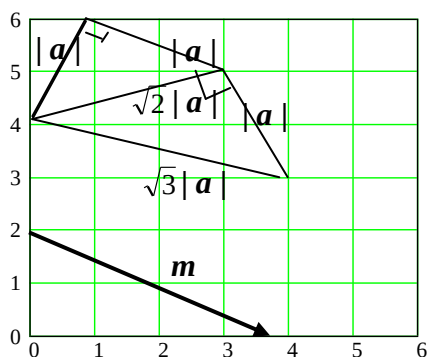
построить угол, одна из сторон которого параллельна вектору b , и на другой стороне отложить k равных отрезков; конец последнего из них соединяем с концом вектора b и через точки деления проводим параллельные прямые.

Теперь построим вектор n методом многоугольника:

$$n = 2a + 0,5b - \frac{2}{3}c - 1\frac{1}{3}d = 2a + 0,5b + (-\frac{2}{3}c) + (-1\frac{1}{3}d).$$



2) Построение вектора $m = \sqrt{3}a$.



Искомый вектор m сонаправлен вектору a , так как получен из него умножением на положительное число. Для нахождения длины вектора m воспользуемся теоремой Пифагора: построим прямоугольный треугольник с катетами длины $|a|$, тогда длина гипотенузы будет равна $\sqrt{2}|a|$, т.к. $|a|^2 + |a|^2 = 2 \cdot |a|^2$; затем построим прямоугольный треугольник с катетами длины $|a|$ и $\sqrt{2}|a|$ – длина гипотенузы будет равна $\sqrt{3}|a|$, т.к. $|a|^2 + (\sqrt{2}|a|)^2 = 3 \cdot |a|^2$. Отложив на лу-

че, сонаправленном вектору a , найденный отрезок, получим вектор m .

Задание 2. Зная длины векторов m и n и угол α между этими векторами, найдите число C .

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 2.

Но- мер вари- анта	$ m $	$ n $	α	$a,$ b	C
1	3	3	$\frac{\pi}{3}$	$-5m-4n$ $3m+6n$	$(-2a + \frac{1}{3}b)(a + 2b)$
2	1	3	π	$-2m+3n$ $4m-n$	$(3a + 2b)(-2a + 4b)$
3	4	5	$\frac{2\pi}{3}$	$5m-2n$ $-3m-n$	$(2a + 3b)(-a + 5b)$
4	3	2	$\frac{\pi}{3}$	$5m+2n$ $-6m-4n$	$(-a + \frac{1}{2}b)(2a + 3b)$
5	2	3	$\frac{\pi}{3}$	$3m-2n$ $-4m+5n$	$(2a - 3b)(5a + b)$
6	2	4	$\frac{2\pi}{3}$	$2m-5n$ $-3m+4n$	$(3a - 4b)(2a + 3b)$
7	2	5	$\frac{2\pi}{3}$	$3m+2n$ $-4m-2n$	$(a - 3b)(0a + \frac{1}{2}b)$
8	3	2	π	$5m+2n$ $m-4n$	$(a - 2b)(3a - 4b)$
9	3	6	$\frac{2\pi}{3}$	$-3m-2n$ $m+5n$	$(-a + 2b)(a + b)$
10	4	1	$\frac{2\pi}{3}$	$5m-3n$ $4m+2n$	$(2a - \frac{1}{2}b)(3a - 0b)$

11	6	3	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-2m+3n}{3m-6n}$	$(3a - \frac{1}{3}b)(a - 2b)$
12	3	2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-2m-4n}{3m+n}$	$(-\frac{1}{2}a + 3b)(a + 2b)$
13	4	5	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4m+3n}{-m+2n}$	$(2a - 3b)(a + 2b)$
14	2	5	0	$\frac{-2m+3n}{5m+n}$	$(-3a + 4b)(2a + 3b)$
15	4	7	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4m-3n}{5m+2n}$	$(-3a + 2b)(2a - b)$
16	5	4	π	$\frac{-5m+3n}{2m+4n}$	$(-3a + \frac{1}{2}b)(-a + b)$
17	2	5	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5m-2n}{3m+4n}$	$(2a + 3b)(a - 2b)$
18	3	4	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7m-3n}{2m+6n}$	$(3a - \frac{1}{2}b)(2a + b)$
19	6	3	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4m-5n}{-m+3n}$	$(2a - 5b)(a + 2b)$
20	1	6	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3m-5n}{-2m+3n}$	$(4a + 5b)(a - 2b)$
21	2	7	π	$\frac{-5m-6n}{2m+7n}$	$(-2a + 5b)(a + 3b)$
22	2	9	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-7m+2n}{4m+6n}$	$(a + 2b)(-a + 3b)$
23	2	9	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5m+4n}{-6m+2n}$	$(3a + 2b)(a - \frac{1}{2}b)$
24	2	11	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-5m-7n}{-3m+2n}$	$(-3a + 4b)(-a + 2b)$
25	4	3	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5m-8n}{-2m+3n}$	$(2a - 3b)(a + 2b)$

26	3	2	$\frac{\pi}{2}$	$\begin{matrix} 2m+n \\ 3m-2n \end{matrix}$	$(\frac{1}{2}a + b)(a - 3b)$
27	1	4	$\frac{\pi}{3}$	$\begin{matrix} -2m+4n \\ -m+5n \end{matrix}$	$(-4a + 2b)(\frac{1}{2}a + b)$
28	5	3	$\frac{3\pi}{2}$	$\begin{matrix} 4m-3n \\ -6m-n \end{matrix}$	$(a - 2b)(a - \frac{1}{2}b)$
29	3	6	π	$\begin{matrix} 3m+n \\ 4m+2n \end{matrix}$	$(-a - 3b)(2a + 4b)$
30	2	7	$\frac{\pi}{2}$	$\begin{matrix} -2m-n \\ -6m+4n \end{matrix}$	$(-3a + b)(-a + 2b)$

Пример. Зная длины векторов $|m| = 2$ и $|n| = 4$ и угол между этими векторами $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, найдите $C = (2a - b)^2$, где $a = 3m - n$, $b = 2m - 4n$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 C &= (2a - b)^2 = (2(3m - n) - (2m - 4n))^2 = (6m - 2n - 2m + 8n)^2 = (4m + 6n)^2 = 16m^2 + 48m \cdot n + 36n^2 = 16|m|^2 + 48|m| \cdot |n| \cdot \cos(\alpha) + 36|n|^2 = \\
 &= 16 \cdot 4 + 48 \cdot 2 \cdot 4 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 36 \cdot 16 = 640 + 384 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 640 - \\
 &- 384 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 640 - 384 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 640 - 192\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $C = 640 - 192\sqrt{3}$.

Задание 3. Используя рисунок, представьте векторы a и b как линейные комбинации векторов e_1 и e_2 .

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 3.

1 – 15.

Дан параллелограмм ABCD. Точки E, F, M, N делят стороны AB, BC, CD, DA в отношении 1 : 2, считая от то-

чек А, В, С, D соответственно; О – пересечение диагоналей параллелограмма.

Номер варианта	<i>a</i>	<i>B</i>	<i>e</i>₁	<i>e</i>₂
1	$\overline{AC}$	$\overline{OF}$	$\overline{AB}$	$\overline{ND}$
2	$\overline{AF}$	$\overline{OM}$	$\overline{AB}$	$\overline{ND}$
3	$\overline{DB}$	$\overline{ON}$	$\overline{AB}$	$\overline{ND}$
4	$\overline{FN}$	$\overline{OE}$	$\overline{AB}$	$\overline{ND}$
5	$\overline{AB}$	$\overline{OM}$	$\overline{CF}$	$\overline{AO}$
6	$\overline{OF}$	$\overline{CN}$	$\overline{CF}$	$\overline{AO}$
7	$\overline{ON}$	$\overline{MF}$	$\overline{CF}$	$\overline{AO}$
8	$\overline{OE}$	$\overline{CD}$	$\overline{CF}$	$\overline{AO}$
9	$\overline{BC}$	$\overline{EA}$	$\overline{OF}$	$\overline{OC}$
10	$\overline{ND}$	$\overline{MC}$	$\overline{OF}$	$\overline{OC}$
11	$\overline{MD}$	$\overline{ON}$	$\overline{OF}$	$\overline{OC}$
12	$\overline{NA}$	$\overline{EF}$	$\overline{OF}$	$\overline{OC}$
13	$\overline{AB}$	$\overline{OM}$	$\overline{BE}$	$\overline{OA}$
14	$\overline{OD}$	$\overline{FC}$	$\overline{BE}$	$\overline{OA}$
15	$\overline{CD}$	$\overline{MN}$	$\overline{BE}$	$\overline{OA}$

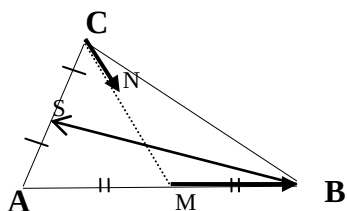
16 – 30.

Дана равнобедренная трапеция ABCD. Точки Е, F, М, N – середины сторон АВ, ВС, CD, DA соответственно. Точка О пересечения диагоналей трапеции делит их в отношении 1:2, считая от вершин В и С.

Номер варианта	<i>a</i>	<i>B</i>	<i>e</i>₁	<i>e</i>₂
16	$\overline{AD}$	$\overline{OF}$	$\overline{AE}$	$\overline{OD}$
17	$\overline{AO}$	$\overline{ON}$	$\overline{AE}$	$\overline{OD}$

18	$\overline{BN}$	$\overline{FC}$	$\overline{AE}$	$\overline{OD}$
19	$\overline{BC}$	$\overline{EF}$	$\overline{AE}$	$\overline{OD}$
20	$\overline{BD}$	$\overline{OF}$	$\overline{FC}$	$\overline{DM}$
21	$\overline{NF}$	$\overline{MO}$	$\overline{FC}$	$\overline{DM}$
22	$\overline{FM}$	$\overline{EN}$	$\overline{FC}$	$\overline{DM}$
23	$\overline{BA}$	$\overline{ME}$	$\overline{FC}$	$\overline{DM}$
24	$\overline{OE}$	$\overline{NM}$	$\overline{OA}$	$\overline{OB}$
25	$\overline{FC}$	$\overline{OM}$	$\overline{OA}$	$\overline{OB}$
26	$\overline{ND}$	$\overline{OF}$	$\overline{OA}$	$\overline{OB}$
27	$\overline{CM}$	$\overline{ON}$	$\overline{OA}$	$\overline{OB}$
28	$\overline{BE}$	$\overline{EN}$	$\overline{OF}$	$\overline{ND}$
29	$\overline{DM}$	$\overline{EM}$	$\overline{OF}$	$\overline{ND}$
30	$\overline{FE}$	$\overline{NM}$	$\overline{OF}$	$\overline{ND}$

Пример. Дан треугольник ABC . Точки M , S – середины AB и AC соответственно, точка N делит CM в отношении $1:2$, считая от точки C . Представьте вектор $\overline{BS}$ как линейную комбинацию векторов $\overline{MB}$ и $\overline{CN}$.



Решение.

$\overline{BS} = \overline{BA} + \overline{AS}$, $\overline{BA} = -2\overline{MB}$, значит, $\overline{BS} = -2\overline{MB} + \overline{AS}$.
 $\overline{AS} = 0,5\overline{AC} = 0,5(\overline{AM} + \overline{MC}) = 0,5(\overline{MB} + 3\overline{CN}) = 0,5(\overline{MB} - 3\overline{CN})$. Следовательно, $\overline{BS} = -2\overline{MB} + 0,5(\overline{MB} - 3\overline{CN}) = -1,5\overline{MB} - 1,5\overline{CN}$.

Ответ: $\overline{BS} = -1,5\overline{MB} - 1,5\overline{CN}$.

Задание 4. Используя рисунок, найдите координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

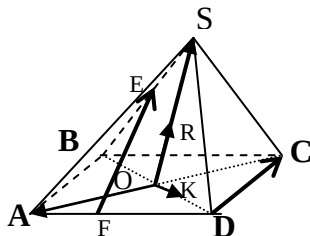
Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки E, F, M, N делят ребра AB, BC, CD, DA в отношении 1:2 соответственно. Точки E_1, F_1, M_1, N_1 – середины ребер $A_1 B_1, B_1 C_1, C_1 D_1, D_1 A_1$ соответственно. Точки P, R, S, T делят ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 в отношении 1:3 соответственно. O – точка пересечения диагоналей параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 4.

Номер варианта	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
1	$\overline{DB}$	$\overline{OD_1}$	$\overline{DN}$	$\overline{DM}$	$\overline{DT}$
2	$\overline{DC_1}$	$\overline{PS}$	$\overline{DM}$	$\overline{DT}$	$\overline{DN}$
3	$\overline{DA_1}$	$\overline{EM_1}$	$\overline{DT}$	$\overline{DN}$	$\overline{DM}$
4	$\overline{SM_1}$	$\overline{OE}$	$\overline{DN}$	$\overline{DT}$	$\overline{DM}$
5	$\overline{FC}$	$\overline{ON_1}$	$\overline{BF}$	$\overline{BR}$	$\overline{BE}$
6	$\overline{CB_1}$	$\overline{MF_1}$	$\overline{BR}$	$\overline{BE}$	$\overline{BF}$
7	$\overline{NM}$	$\overline{TO}$	$\overline{BE}$	$\overline{BF}$	$\overline{BR}$
8	$\overline{RB_1}$	$\overline{F_1 T}$	$\overline{BF}$	$\overline{BE}$	$\overline{BR}$
9	$\overline{D_1 P}$	$\overline{SO}$	$\overline{AP}$	$\overline{AE}$	$\overline{AN}$
10	$\overline{AC_1}$	$\overline{TR}$	$\overline{AE}$	$\overline{AN}$	$\overline{AP}$
11	$\overline{A_1 P}$	$\overline{M_1 O}$	$\overline{AN}$	$\overline{AP}$	$\overline{AE}$
12	$\overline{CE}$	$\overline{TE_1}$	$\overline{AP}$	$\overline{AN}$	$\overline{AE}$
13	$\overline{B_1 C}$	$\overline{OR}$	$\overline{CM}$	$\overline{CF}$	$\overline{CS}$
14	$\overline{EN}$	$\overline{E_1 T}$	$\overline{CS}$	$\overline{CM}$	$\overline{CF}$
15	$\overline{AN}$	$\overline{PT}$	$\overline{CF}$	$\overline{CS}$	$\overline{CM}$

16	$\overline{C_1C}$	$\overline{NO}$	$\overline{CM}$	$\overline{CS}$	$\overline{CF}$
17	$\overline{OB_1}$	$\overline{N_1E}$	$\overline{B_1R}$	$\overline{B_1E_1}$	$\overline{B_1F_1}$
18	$\overline{RF_1}$	$\overline{TE}$	$\overline{B_1F_1}$	$\overline{B_1R}$	$\overline{B_1E_1}$
19	$\overline{D_1F_1}$	$\overline{M_1E}$	$\overline{B_1E_1}$	$\overline{B_1F_1}$	$\overline{B_1R}$
20	$\overline{N_1R}$	$\overline{PM}$	$\overline{B_1R}$	$\overline{B_1F_1}$	$\overline{B_1E_1}$
21	$\overline{NN_1}$	$\overline{OT}$	$\overline{A_1E_1}$	$\overline{A_1N_1}$	$\overline{A_1P}$
22	$\overline{EE_1}$	$\overline{MR}$	$\overline{A_1P}$	$\overline{A_1E_1}$	$\overline{A_1N_1}$
23	$\overline{E_1B_1}$	$\overline{RM}$	$\overline{A_1N_1}$	$\overline{A_1P}$	$\overline{A_1E_1}$
24	$\overline{AN_1}$	$\overline{NS}$	$\overline{A_1E_1}$	$\overline{A_1P}$	$\overline{A_1N_1}$
25	$\overline{CD_1}$	$\overline{ET}$	$\overline{C_1N_1}$	$\overline{C_1M_1}$	$\overline{C_1F_1}$
26	$\overline{MN_1}$	$\overline{EO}$	$\overline{C_1F_1}$	$\overline{C_1N_1}$	$\overline{C_1M_1}$
27	$\overline{E_1N_1}$	$\overline{OP}$	$\overline{C_1M_1}$	$\overline{C_1M_1}$	$\overline{C_1N_1}$
28	$\overline{N_1F_1}$	$\overline{OA}$	$\overline{C_1N_1}$	$\overline{C_1F_1}$	$\overline{C_1M_1}$
29	$\overline{TN_1}$	$\overline{OB_1}$	$\overline{D_1M_1}$	$\overline{D_1T}$	$\overline{D_1N_1}$
30	$\overline{E_1F_1}$	$\overline{MO}$	$\overline{D_1M_1}$	$\overline{D_1T}$	$\overline{D_1N_1}$

Пример. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Найти координаты векторов $\overline{OS}$, $\overline{DC}$, $\overline{FE}$ в базисе $\overline{OA} = \mathbf{e}_1$, $\overline{OK} = \mathbf{e}_2$, $\overline{OR} = \mathbf{e}_3$, если O – точка пересечения диагоналей основания $ABCD$; $BE:ES=2:1$; $AF:FD=1:3$; $OR:RS=2:3$; $OK=KD$.



Решение. 1) $\overline{OS} \parallel \overline{OR}$ и $RS=1,5OR$, значит,
 $\overline{OS} = \overline{OR} + \overline{RS} = \overline{OR} + 1,5\overline{OR} = 2,5\overline{OR} = 2,5\mathbf{e}_3$.

Итак, $\overline{OS} = 2,5\mathbf{e}_3$, следовательно, $\overline{OS} = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 2,5\mathbf{e}_3$, то есть в данном базисе $\overline{OS}$ имеет координаты $(0; 0; 2,5)$.

2) $\overline{DC} = \overline{DO} + \overline{OC} = -2\overline{OK} + (-\overline{OA}) = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, т.к. $KD = KO$, $OC=OA$, $\overline{DO} \uparrow \downarrow \overline{OK}$, $\overline{OC} \uparrow \downarrow \overline{OA}$. Итак, $\overline{DC} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, следовательно, $\overline{DC} = -1\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$, то есть в данном базисе $\overline{DC}$ имеет координаты $(-1; -2; 0)$.

3) $\overline{FE} = \overline{FA} + \overline{AB} + \overline{BE}$. Найдем каждое слагаемое.

а) Поскольку, по условию, $DF=3FA$ и $\overline{DF} \uparrow \uparrow \overline{FA}$, то $\overline{DA} = \overline{DF} + \overline{FA} = 3\overline{FA} + \overline{FA} = 4\overline{FA}$. Значит, $\overline{FA} = 0,25\overline{DA}$.

С другой стороны, $\overline{DA} = \overline{OA} - \overline{OD} = \overline{OA} - 2\overline{OK} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$. Значит, $\overline{FA} = 0,25\mathbf{e}_1 - 0,5\mathbf{e}_2$.

б) Так как $\overline{AB} = \overline{DC}$, то $\overline{AB} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ (см. пункт 2).

в) По условию $ES = 0,5BE$. Перейдем к векторным равенствам:

$$\overline{BS} = \overline{BE} + \overline{ES} = \overline{BE} + 0,5\overline{BE} = 1,5\overline{BE},$$

$$\overline{BS} = \overline{BO} + \overline{OS} = 2\overline{OK} + 2,5\overline{OR} = 2\mathbf{e}_2 + 2,5\mathbf{e}_3.$$

Значит, $\overline{BE} = \frac{4}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{5}{3}\mathbf{e}_3$.

Подставляя найденные выражения в равенство $\overline{FE} = \overline{FA} + \overline{AB} + \overline{BE}$, получаем:

$$\overline{FE} = (0,25\mathbf{e}_1 - 0,5\mathbf{e}_2) + (-\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) + \left(\frac{4}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{5}{3}\mathbf{e}_3\right) = -\frac{3}{4}\mathbf{e}_1 - \frac{7}{6}\mathbf{e}_2 + \frac{5}{3}\mathbf{e}_3.$$

Итак, в данном базисе $\overline{FE}$ имеет координаты $(-\frac{3}{4}; -\frac{7}{6}; \frac{5}{3})$.

Ответ: $\overline{OS} (0; 0; 2,5)$; $\overline{DC} (-1; -2; 0)$; $\overline{FE} (-\frac{3}{4}; -\frac{7}{6}; \frac{5}{3})$.

Задание 5. Для векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ найдите координаты вектора $\mathbf{d}$; найдите проекцию вектора $\mathbf{c}$ на вектор $\mathbf{b}$; определите тип угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ (острый, прямой, тупой). В каждом случае постройте геометрическую интерпретацию.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 5.

Номер варианта	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{c}$	$\mathbf{d}$
1	(2;6)	(-1;3)	(-5;7)	$0,5\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$
2	(-2;3)	(3;-4)	(2;5)	$2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$
3	(-3;-2)	(1;-5)	(-4;3)	$\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$
4	(-6; 3)	(4;1)	(-3;-3)	$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$
5	(2;5)	(-3;2)	(-2;-6)	$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$
6	(5;-4)	(3;4)	(-5;2)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$
7	(-2;-7)	(-6;3)	(1;-2)	$\mathbf{a} - \mathbf{b} - 4\mathbf{c}$
8	(3;5)	(-4;-2)	(1;-6)	$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$
9	(-2;-6)	(-3;5)	(6;-2)	$\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$
10	(0;8)	(-6;2)	(-3;-3)	$0,5\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$
11	(-3;-1)	(2;5)	(-1;-4)	$-2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$
12	(5;5)	(1;9)	(-2;-4)	$\mathbf{a} - \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$
13	(1;7)	(-6;2)	(-4;-2)	$2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$
14	(6;2)	(-1;8)	(0;-5)	$\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$
15	(2;-5)	(-3;-6)	(1;4)	$2\mathbf{a} - \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$
16	(-4;0)	(-2;-3)	(1;1)	$\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$
17	(1;3)	(-2;5)	(-1;-1)	$3\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$
18	(6;8)	(-5;-1)	(3;1)	$0,5\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$
19	(-2;-6)	(-4;2)	(-1;5)	$\mathbf{a} + 0,5\mathbf{b} + \mathbf{c}$
20	(1;6)	(5;0)	(-4;2)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$
21	(6;8)	(1;-1)	(-2;-2)	$0,5\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$
22	(-2;3)	(5;-2)	(8;12)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} - 0,5\mathbf{c}$
23	(6;1)	(1;4)	(-4;-1)	$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$
24	(-6;-10)	(-1;-2)	(2;3)	$0,5\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$

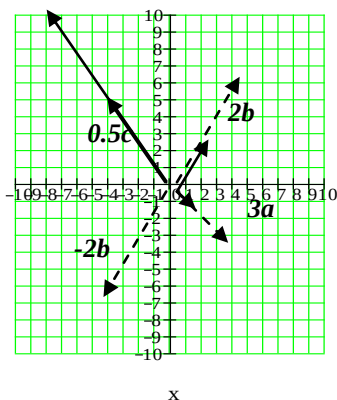
25	(2;8)	(-6;1)	(-4;-1)	$0,5a + b + 2c$
26	(-4;1)	(-6;-9)	(5;3)	$a - \frac{1}{3}b + c$
27	(3;2)	(1;7)	(-4;-5)	$2a - b + c$
28	(0;-7)	(-4;-1)	(1;2)	$-a - 2b - 2c$
29	(3;4)	(-5;1)	(1;5)	$2a + b - 2c$
30	(-2;5)	(4;1)	(0;6)	$-2a + 2b + 0,5c$

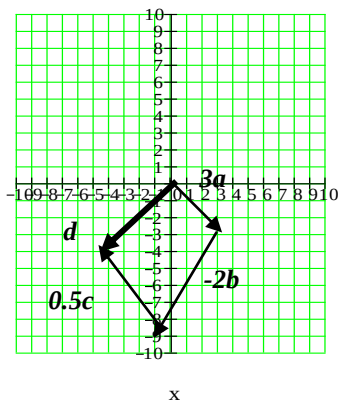
Пример. Для векторов $a(1;-1)$, $b(2;3)$, $c(-8;10)$ найдите координаты вектора $d=3a-2b+0,5c$; найдите проекцию вектора c на вектор b ; определите тип угла между векторами $3a$ и $b-c$ (острый, прямой, тупой). В каждом случае постройте геометрическую интерпретацию.

Решение.

1) Вычислим координаты вектора $d = 3a - 2b + 0,5c$:
 $d = 3(1;-1) - 2(2;3) + 0,5(-8;10) = (3;-3) - (4;6) + (-4;5) = (-5;-4)$.

Геометрическая интерпретация линейных операций над векторами a , b , c на координатной плоскости:

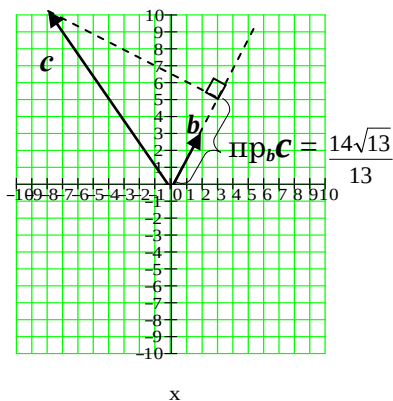




2) Найдем проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{b}$:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{c} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}|} = \frac{2 \cdot (-8) + 3 \cdot 10}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{14}{\sqrt{13}} = \frac{14\sqrt{13}}{13}$$

Геометрическая интерпретация проекции вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{b}$:

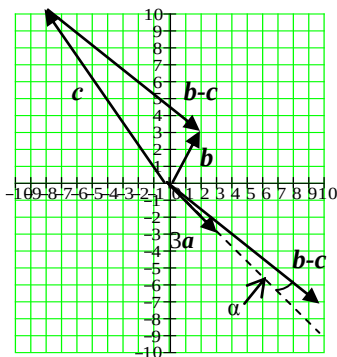


3) Найдем косинус угла между векторами $3\vec{a}$ и $\vec{b}-\vec{c}$:

$$3\vec{a} = (3; -3), \vec{b} - \vec{c} = (10; -7), \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b} - \vec{c}|} =$$

$$\frac{3 \cdot 10 + (-3) \cdot (-7)}{\sqrt{3^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{10^2 + (-7)^2}} = \frac{51}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{149}} = \frac{51}{3\sqrt{298}} = \frac{17}{\sqrt{298}} > 0,$$

следовательно, угол α между векторами $3a$ и $b-c$ – острый.



Для нахождения угла α на чертеже отложим вектор $b-c$ от начала вектора $3a$.

$$\cos \alpha = \frac{17}{\sqrt{298}}$$

Ответ: $d=(-5;-4)$; $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{c} = \frac{14\sqrt{13}}{13}$;

угол между векторами $3a$ и $b-c$ – острый.

Задание 6. Для векторов a, b, c найдите координаты вектора r ; найдите координаты векторного произведения $a \times b$; вычислите смешанное произведение abc ; укажите, правой или левой является упорядоченная тройка векторов (a, b, c) . В каждом случае постройте геометрическую интерпретацию.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 6.

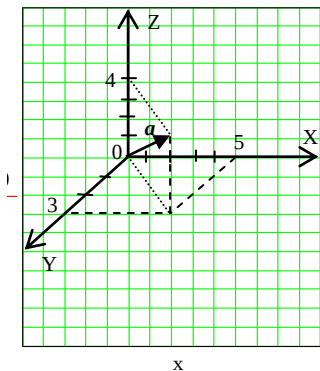
Номер Варианта	a	b	c	r
1	(5;4;1)	(-3;5;2)	(2;-1;3)	$a + b - 2c$
2	(2;-1;4)	(-3;0;-2)	(4;5;-3)	$2a + 3b - c$
3	(-1;1;2)	(2;-3;-5)	(-6;3;-1)	$4a + 2b + c$
4	(1;3;4)	(-2;5;0)	(3;-2;-4)	$a - b + 2c$

5	(1;-1;1)	(-5;-3;1)	(2;-1;0)	$5a + b - 2c$
6	(3;1;2)	(-7;-2;-4)	(-4;0;3)	$a + b - c$
7	(-3;0;1)	(2;7;-3)	(-4;3;5)	$2a + b - c$
8	(5;1;2)	(-2;1;-3)	(4;-3;5)	$a + 2b + c$
9	(0;2;-3)	(4;-3;-2)	(-5;-4;0)	$a + b + c$
10	(3;-1;2)	(-2;3;1)	(4;-5;-3)	$3a + 2b - c$
11	(5;3;1)	(-1;2;-3)	(3;-4;2)	$a + 2b + c$
12	(3;1;-3)	(-2;4;1)	(1;-2;5)	$2a + b + c$
13	(6;1;-3)	(-3;2;1)	(-1;-3;4)	$a + 2b + 2c$
14	(4;2;3)	(-3;1;-8)	(2;-4;5)	$a + b + c$
15	(-2;1;3)	(3;-6;2)	(-5;-3;-1)	$a + b - c$
16	(1;3;6)	(-3;4;-5)	(1;-7;2)	$a + b + c$
17	(7;2;1)	(5;1;-2)	(-3;4;5)	$a - b - c$
18	(3;5;6)	(-2;7;-5)	(6;-2;1)	$a - b - c$
19	(5;3;2)	(2;-5;1)	(-7;4;-3)	$a + b + c$
20	(11;1;2)	(-3;3;-4)	(-4;-2;7)	$a + b + c$
21	(9;5;3)	(-3;2;1)	(4;-7;4)	$a + 2b + c$
22	(7;2;1)	(3;-5;6)	(-4;3;-4)	$a + b + c$
23	(1;2;3)	(-5;3;-1)	(-6;4;5)	$2a + b - c$
24	(-2;5;1)	(3;2;-7)	(4;-3;2)	$a + b + c$
25	(3;1;2)	(-4;3;-1)	(2;3;4)	$a + b - 2c$
26	(2;1;1)	(-3;2;0)	(1;-1;-1)	$2a + 2b - 3c$
27	(3;2;5)	(4;-2;1)	(3;3;3)	$a - 2b - c$
28	(-4;2;1)	(3;-3;0)	(1;1;1)	$2a + 2b - c$
29	(5;6;-2)	(-4;1;1)	(2;1;1)	$a + 2b - 2c$
30	(3;1;1)	(0;-1;2)	(-4;3;1)	$2a - 3b + c$

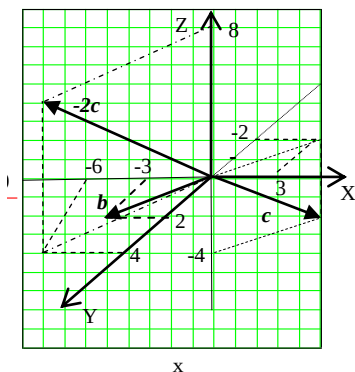
Пример. Для векторов $a(5;3;4)$, $b(-3;2;0)$, $c(3;-2;-4)$ найдите координаты вектора $r=a+b-2c$; найдите координаты векторного произведения $a \times b$; вычислите смешанное произведение abc ; укажите, правой или левой является упорядоченная тройка векторов (a, b, c) . В каждом случае постройте геометрическую интерпретацию.

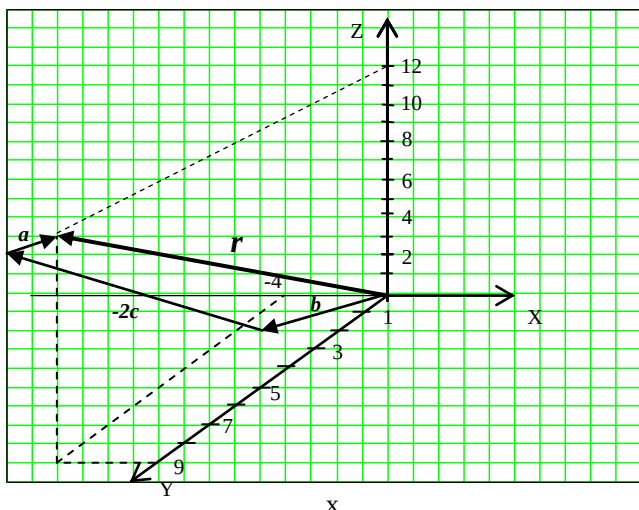
Решение. 1) Вычислим координаты вектора $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$:
 $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = (5; 3; 4) + (-3; 2; 0) - 2(3; -2; -4) = (-4; 9; 12)$.

Построим геометрическую интерпретацию линейных операций над векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Для построения вектора $\mathbf{a}(5;3;4)$ необходимо провести прямые, параллельные осям координат Ox и Oy , через точки $(0;3;0)$ и $(5;0;0)$ соответственно. Через точку пересечения этих прямых надо провести прямую, параллельную оси Oz , и отложить на ней от точки пересечения 4 единицы вверх. С полученной точкой соединим начало координат. Вектор $\mathbf{a}(5; 3; 4)$ построен.



Аналогично построим векторы $\mathbf{b}$ и $-2\mathbf{c}$.



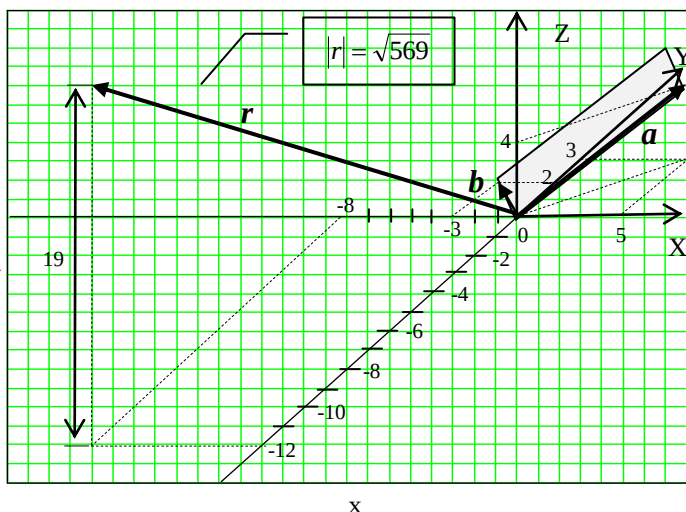


Для построения вектора $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ воспользуемся правилом многоугольника. Легко проверить, что конец построенного вектора $\mathbf{r}$ имеет координаты $(-4; 9; 12)$, то есть координаты вектора $\mathbf{r}$ получаются те же, что уже были вычислены.

2) Найдем координаты векторного произведения $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = \\ &= -8 \cdot \bar{i} - 12 \cdot \bar{j} + 19 \cdot \bar{k}. \text{ Значит, } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-8; -12; 19). \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация модуля векторного произведения: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 19^2} = \sqrt{569}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.



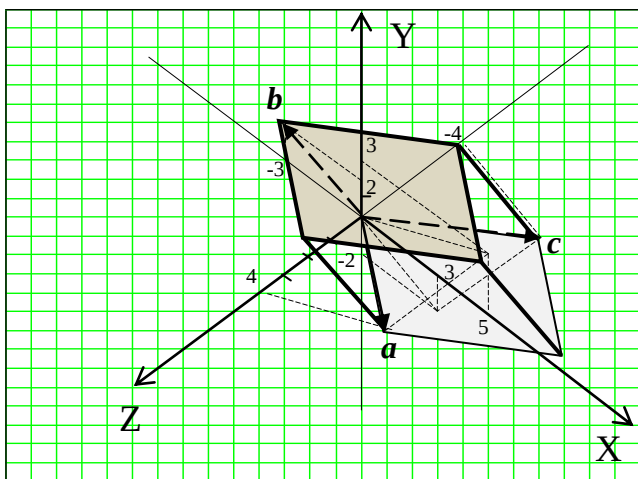
3) Вычислим смешанное произведение $\mathbf{abc}$:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -76.$$

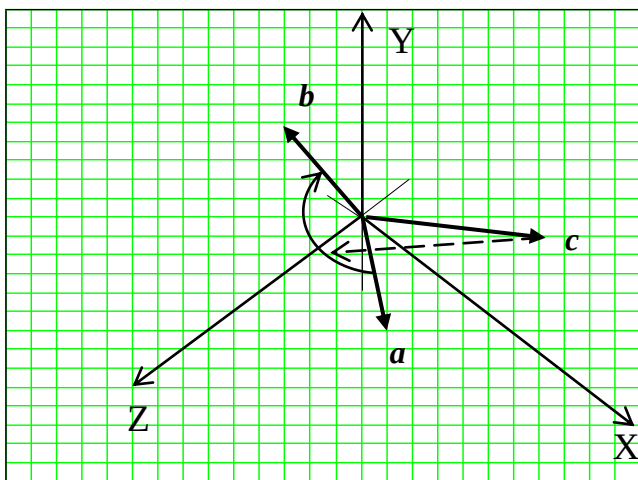
Геометрическая интерпретация смешанного произведения $\mathbf{abc}$: объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, равен 76 (модуль смешанного произведения).

4) Поскольку $\mathbf{abc} = -76 < 0$, то упорядоченная тройка векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ – левая.

Геометрическая интерпретация отрицательной ориентации упорядоченной тройки векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$: ориентацию тройки векторов можно определить по «правилу буравчика» – движение от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ происходит по часовой стрелке, если смотреть из конца вектора $\mathbf{c}$; следовательно, тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ имеет отрицательную ориентацию (левая тройка).



x



x

Ответ: $r = (-4; 9; 12)$; $a \times b = (-8; -12; 19)$;
 $abc = -76$; тройка (a, b, c) – левая.

Задание 7. Для данных векторов a и b подобрать: вектор c , коллинеарный вектору a ; вектор n , ортогональный вектору a ; вектор e так, чтобы векторы a, b, e были компла-

нарны; вектор $\mathbf{d}$ так, чтобы тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ была базисом с заданной ориентацией.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 7.

Номер варианта	$\mathbf{a}$	$\mathbf{b}$	Ориентация базиса $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$
1	(1;3;4)	(-2;5;0)	Положительная
2	(3;1;2)	(-7;-2;-4)	Отрицательная
3	(-1;1;2)	(2;-3;-5)	Положительная
4	(2;-1;3)	(-3;5;2)	Отрицательная
5	(1;-1;1)	(-5;-3;1)	Положительная
6	(2;-1;4)	(-3;0;-2)	Отрицательная
7	(-3;0;1)	(2;7;-3)	Положительная
8	(3;-1;2)	(-2;3;1)	Отрицательная
9	(0;2;-3)	(4;-3;-2)	Положительная
10	(6;1;-3)	(-3;2;1)	Отрицательная
11	(1;3;6)	(-3;4;-5)	Положительная
12	(3;1;-3)	(-2;4;1)	Отрицательная
13	(1;-7;2)	(4;-3;5)	Положительная
14	(4;2;3)	(-3;1;-8)	Отрицательная
15	(-2;1;3)	(3;-6;2)	Положительная
16	(5;3;1)	(-1;2;-3)	Отрицательная
17	(6;-2;1)	(5;1;-2)	Положительная
18	(3;5;6)	(-2;7;-5)	Отрицательная
19	(5;3;2)	(2;-5;1)	Положительная
20	(-7;4;-3)	(-3;3;4)	Отрицательная
21	(4;-7;4)	(11;1;2)	Положительная
22	(7;2;1)	(-4;3;-4)	Отрицательная
23	(1;2;3)	(-6;4;5)	Положительная
24	(-2;5;1)	(3;2;-7)	Отрицательная
25	(-5;3;-1)	(-4;3;-1)	Положительная
26	(4;-3;2)	(3;1;2)	Отрицательная
27	(3;-5;6)	(2;3;4)	Положительная

28	(9;5;3)	(-3;2;1)	Отрицательная
29	(-4;-2;7)	(7;2;1)	Положительная
30	(5;1;2)	(-2;1;-3)	Отрицательная

Пример. Для векторов $\mathbf{a}(1;-2;3)$ и $\mathbf{b}(0;1;4)$ подобрать: вектор $\mathbf{c}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a}$ и сонаправленный с ним; вектор $\mathbf{n}$, ортогональный вектору $\mathbf{a}$; вектор $\mathbf{e}$ так, чтобы векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$ были компланарны; вектор $\mathbf{d}$ так, чтобы тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ была базисом с положительной ориентацией.

Решение.

1) Обозначим координаты вектора $\mathbf{c}$ через $(x;y;z)$. Для коллинеарности и сонаправленности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ нужно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3} = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 3t \\ t > 0 \end{cases}.$$

В качестве t можно выбрать любое положительное значение, например, $t = 2$. Тогда $x = 2$, $y = -4$, $z = 6$. Итак, вектор $\mathbf{c}$ имеет координаты $(2;-4;6)$.

2) Обозначим координаты вектора $\mathbf{n}$ через $(x;y;z)$. Для ортогональности ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ нужно, чтобы их скалярное произведение было равно 0: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$, то есть $1 \cdot x + (-2) \cdot y + 3 \cdot z = 0$.

Выберем произвольно любые две (не равные одновременно нулю) координаты вектора $\mathbf{n}$: например, $x = 6$, $y = -3$. Тогда получим уравнение относительно координаты z : $1 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) + 3 \cdot z = 0$. Решая это уравнение, найдем: $z = -4$. Итак, вектор $\mathbf{n}$ имеет координаты $(6;-3;-4)$.

3) Обозначим координаты вектора $\mathbf{e}$ через $(x;y;z)$. Для компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$ нужно, чтобы их смешанное произведение было равно 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0, \quad x \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-11x - 4y + z = 0.$$

Выберем произвольно любые две координаты вектора **e**: например, $x = 1$, $y = -3$. Тогда получим уравнение относительно координаты z : $-11 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) + z = 0$. Решая это уравнение, найдем: $z = -1$.

Итак, вектор **e** имеет координаты $(1; -3; -1)$.

4) Обозначим координаты вектора **d** через $(x; y; z)$. Для того, чтобы упорядоченная тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$ была базисом с положительной ориентацией, нужно, чтобы их смешанное произведение было положительно:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ x & y & z \end{vmatrix} > 0, \quad x \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

$$-11x - 4y + z > 0.$$

Вновь выберем произвольно любые две координаты вектора **d**: например, $x = 1$, $y = -3$. Тогда получим неравенство относительно координаты z : $-11 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) + z > 0$. Решая его, найдем: $z > -1$. Возьмем, например, $z = 5$.

Итак, вектор **d** имеет координаты $(1; -3; 5)$.

Ответ: $c(2; -4; 6)$; $n(6; -3; -4)$; $e(1; -3; -1)$; $d(1; -3; 5)$.

Тема 2. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Задания.

- 1) Докажите, что точки A , B , C не лежат на одной прямой.
- 2) Составьте уравнение прямой, содержащей указанную сторону треугольника ABC .
- 3) Составьте уравнение прямой, проходящей через указанную вершину треугольника ABC параллельно его противолежащей стороне.
- 4) Определите взаимное расположение прямой M_1M_2 и прямой m .
- 5) Запишите уравнения каких-либо прямых l и n , не проходящих ни через одну вершину треугольника ABC , если $l \parallel M_1M_2$, $n \perp M_1M_2$.
- 6) Определите расстояние от центра масс треугольника ABC до прямой, содержащей указанную сторону треугольника.
- 7) Найдите отношение периметра треугольника ABC к его площади.
- 8) Определите вид треугольника ABC (остроугольный, тупоугольный, прямоугольный; равносторонний, равнобедренный, разносторонний).
- 9) Изобразите треугольник ABC и все найденные элементы на чертеже.

ВАРИАНТЫ УСЛОВИЙ К ЗАДАНИЯМ

Номер вари- анта	1)-9)	2), 6)	3)	4), 5)
1	$A(-5;2)$, $B(5;7)$, $C(1;-1)$	AB	C	$M_1(1;2)$, $M_2(5;4)$, m содержит высоту, проведенную из вершины B .
2	$A(-2;10)$, $B(13;5)$, $C(1;-1)$	BC	A	$M_1(5;5)$, $M_2(11;7)$, m содержит биссектрису, проведенную из вершины C .

3	A(3;-1), B(-7;-6), C(-3;2)	AC	B	$M_1(-3;-1)$, $M_2(-7;-3)$, m содержит медиану, проведенную из вершины A.
4	A(3;-9), B(-12;-4), C(0;0)	AB	C	$M_1(-4;-4)$, $M_2(-10;-6)$, m содержит высоту, проведенную из вершины B.
5	A(-12;9), B(12;16), C(0;0)	BC	A	$M_1(10;-3)$, $M_2(-2;6)$, m содержит биссектрису, проведенную из вершины C.
6	A(-7;4), B(3;9), C(-1;1)	AC	B	$M_1(-1;4)$, $M_2(3;6)$, m содержит медиану, проведенную из вершины A.
7	A(-4;10), B(11;5), C(-1;1)	AB	C	$M_1(3;5)$, $M_2(9;7)$, m содержит высоту, проведенную из вершины B.
8	A(-1;-4), B(-11;-9), C(-7;-1)	BC	A	$M_1(-7;-4)$, $M_2(-11;-6)$, m содержит биссектрису, проведенную из вершины C.
9	A(3;3), B(-12;2), C(0;6)	AC	B	$M_1(-4;2)$, $M_2(-10;0)$, m содержит медиану, проведенную из вершины A.
10	A(-11;8), B(13;15), C(1;-1)	AB	C	$M_1(11;-4)$, $M_2(-1;5)$, m содержит высоту, проведенную из вершины B.
11	A(-4;2), B(6;7), C(2;-1)	BC	A	$M_1(2;2)$, $M_2(6;4)$, m содержит биссектрису, проведенную из вершины C.
12	A(-2;8), B(13;3), C(1;-1)	AC	B	$M_1(5;3)$, $M_2(11;5)$, m содержит медиану, проведенную из вершины A.
13	A(9;-5), B(-1;-10), C(3;-2)	AB	C	$M_1(3;-5)$, $M_2(-1;-7)$, m содержит высоту, проведенную из вершины B.
14	A(-2;-8), B(-17;-3), C(-5;1)	BC	A	$M_1(-9;-3)$, $M_2(-15;-5)$, m содержит биссектрису, проведенную из вершины C.
15	A(-13;10), B(11;17), C(-1;1)	AC	B	$M_1(9;-2)$, $M_2(-3;7)$, m содержит медиану, проведенную из вершины A.
16	A(1;8),	AB	C	$M_1(7;8)$, $M_2(11;10)$,

	B(11;13), C(7;5)			m содержит высоту, проведенную из вершины В.
17	A(-1;9), B(14;4), C(2;0)	BC	A	$M_1(6;4)$, $M_2(12;6)$, m содержит биссектрису, проведенную из вершины С.
18	A(0;-3), B(-10;-8), C(-6;0)	AC	B	$M_1(-6;-3)$, $M_2(-10;-5)$, m содержит медиану, проведенную из вершины А
19	A(-1;-7), B(-16;-2), C(-4;2)	AB	C	$M_1(-8;-2)$, $M_2(-14;-4)$, m содержит высоту, проведенную из вершины В.
20	A(-10;8), B(14;15), C(2;-1)	BC	A	$M_1(12;-4)$, $M_2(0;5)$, m содержит биссектрису, проведенную из вершины С.
21	A(-8;6), B(2;11), C(-2;3)	AC	B	$M_1(-2;6)$, $M_2(2;8)$, m содержит медиану, проведенную из вершины А
22	A(-3;11), B(12;6), C(0;2)	AB	C	$M_1(4;6)$, $M_2(10;8)$, m содержит высоту, проведенную из вершины В.
23	A(6;-7), B(-4;-12), C(0;-4)	BC	A	$M_1(0;-7)$, $M_2(-4;-9)$, m содержит биссектрису, проведенную из вершины С.
24	A(0;-6), B(-15;-1), C(-3;-3)	AC	B	$M_1(-7;-1)$, $M_2(-13;-3)$, m содержит медиану, проведенную из вершины А.
25	A(-5;14), B(19;21), C(7;5)	AB	C	$M_1(17;2)$, $M_2(5;11)$, m содержит высоту, проведенную из вершины В.
26	A(-6;7), B(4;12), C(0;4)	BC	A	$M_1(0;7)$, $M_2(4;9)$, m содержит биссектрису, проведенную из вершины С.
27	A(0;6), B(15;1), C(3;-3)	AC	B	$M_1(7;1)$, $M_2(13;3)$, m содержит медиану, проведенную из вершины А.
28	A(8;-6), B(-2;-11), C(2;-3)	AB	C	$M_1(2;-6)$, $M_2(-2;-8)$, m содержит высоту, проведенную из вершины В.
29	A(3;-11), B(-12;-6),	BC	A	$M_1(-4;-6)$, $M_2(-10;-8)$, m содержит биссектрису,

	$C(0;-2)$			проведенную из вершины C .
30	$A(-14;12),$ $B(10;19),$ $C(-2;3)$	AC	B	$M_1(8;0), M_2(-4;9),$ m содержит медиану, проведенную из вершины A .

Пример.

- 1) Докажите, что точки $A(1;1)$, $B(8;-2)$, $C(5;-3)$ не лежат на одной прямой.
- 2) Составьте уравнение прямой, содержащей сторону AB треугольника ABC .
- 3) Составьте уравнение прямой, проходящей через вершину B треугольника ABC параллельно противоположной его стороне.
- 4) Определите взаимное расположение прямой M_1M_2 , где $M_1(-3,-4)$, $M_2(-1,6)$, и каждой из прямых m_1 , m_2 и m_3 , если:
 m_1 содержит высоту, проведенную из вершины A ;
 m_2 содержит медиану, проведенную из вершины C ;
 m_3 содержит биссектрису, проведенную из вершины B .
- 5) Запишите уравнения каких-либо прямых a и b , не проходящих ни через одну вершину треугольника ABC , если $a \parallel M_1M_2$, $b \perp M_1M_2$.
- 6) Определите расстояние от центра масс треугольника ABC до прямой, содержащей его сторону AB .
- 7) Найдите отношение периметра треугольника ABC к его площади.
- 8) Определите вид треугольника ABC (остроугольный, тупоугольный, прямоугольный, равносторонний, равнобедренный, разносторонний).
- 9) Изобразите треугольник ABC и все найденные элементы на чертеже.

Решение. 1) Даны точки $A(1;1)$, $B(8;-2)$, $C(5;-3)$. Эти точки лежат на одной прямой, если коллинеарны векторы с началом в одной из них и с концами в двух других.

Найдем, например, координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:
 $\overline{AB} = (8-1; -2-1) = (7; -3)$, $\overline{AC} = (5-1; -3-1) = (4; -4)$. Проверим
 условие коллинеарности этих векторов: $\frac{7}{4} \neq \frac{-3}{-4}$ – значит,
 $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ неколлинеарны, то есть точки $A(1;1)$, $B(8;-2)$ и
 $C(5;-3)$ не лежат на одной прямой, что и требовалось дока-
 зать.

2) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей че-
 рез точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Пусть $(x_1; y_1)$ –
 координаты точки A : $x_1=1, y_1=1$; $(x_2; y_2)$ – координаты точки
 B : $x_2=8, y_2=-2$. Тогда получим:
 $\frac{x-1}{8-1} = \frac{y-1}{-2-1}$, $\frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{-3}$, $-3(x-1) - 7(y-1) = 0$,
 $3x + 7y - 10 = 0$.

Ответ: уравнение прямой l , содержащей сторону AB ,
 имеет вид: $3x + 7y - 10 = 0$.

3) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей че-
 рез точку $(x_0; y_0)$ и имеющей направляющий вектор с коор-
 динатами $(a_1; a_2)$: $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$. В нашем случае направ-
 ляющий вектор $\overline{AC} (4; -4)$, точка прямой $B(8; -2)$. Следова-
 тельно, получаем уравнение:

$$\frac{x-8}{4} = \frac{y-(-2)}{-4} \Leftrightarrow (x-8) = -(y+2) \Leftrightarrow x + y - 6 = 0.$$

Ответ: уравнение прямой, проходящей через вершину
 B параллельно стороне AC , имеет вид $x + y - 6 = 0$.

4) Найдем сначала уравнения прямых M_1M_2, m_1, m_2, m_3 .

Составим уравнение прямой M_1M_2 , проходящей через точки $M_1(-3;-4)$ и $M_2(-1;6)$:

$$\frac{x - (-3)}{(-1) - (-3)} = \frac{y - (-4)}{6 - (-4)}, \quad \frac{x + 3}{2} = \frac{y + 4}{10}, \quad 5(x + 3) - (y + 4) = 0,$$

$5x - y + 11 = 0$. Итак, уравнение прямой M_1M_2 имеет вид:
 $5x - y + 11 = 0$.

Составим уравнение прямой m_1 , содержащей высоту, проведенную из вершины A . Для этого воспользуемся уравнением $n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0$, где $(n_1; n_2)$ – координаты вектора нормали, $(x_0; y_0)$ – координаты точки искомой прямой. По условию $m_1 \perp BC$, следовательно, вектор $\overline{BC}$ с координатами $(5 - 8; -3 - (-2)) = (-3; -1)$ является вектором нормали для прямой m_1 . Прямая проходит через точку $A(1; 1)$, поэтому получаем уравнение: $(-3)(x - 1) + (-1)(y - 1) = 0$, то есть $3x + y - 4 = 0$. Итак, уравнение прямой m_1 имеет вид $3x + y - 4 = 0$.

Составим уравнение прямой m_2 , содержащей медиану, проведенную из вершины C . Для этого воспользуемся уравнением $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ – координаты точек искомой прямой. Координаты одной из этих точек известны: $C(5; -3)$. Координаты другой точки можно определить: так как m_2 содержит медиану треугольника, то m_2 проходит через середину N стороны AB . Тогда, используя формулы координат середины отрезка AB , получим:

$x_N = \frac{1 + 8}{2} = \frac{9}{2}$, $y_N = \frac{1 + (-2)}{2} = -\frac{1}{2}$. Запишем уравнение прямой m_2 , проходящей через точки $C(5; -3)$ и $N\left(\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{x - 5}{\frac{9}{2} - 5} = \frac{y - (-3)}{-\frac{1}{2} - (-3)}, \quad \frac{x - 5}{-\frac{1}{2}} = \frac{y - (-3)}{\frac{5}{2}}, \quad 5(x - 5) + (y + 3) = 0,$$

$5x + y - 22 = 0$. Итак, уравнение прямой m_2 имеет вид

$$5x + y - 22 = 0.$$

Составим уравнение прямой m_3 , содержащей биссектрису, проведенную из вершины A . Воспользуемся

уравнением $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$, где $(a_1; a_2)$ – координаты на-

правляющего вектора, $(x_0; y_0)$ – координаты точки искомой прямой. По условию $A(1; 1) \in m_3$. Выберем в качестве направляющего вектора прямой m_3 вектор $\overline{AL} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ – единичные векторы, сонаправленные соответственно векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (вектор $\overline{AL}$ проходит по диагонали ромба, стороны которого проходят по сторонам AB и AC треугольника ABC , а значит – по биссектрисе угла A). Так как $\overline{AB} = (7; -3)$, то $|\overline{AB}| = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58}$, значит,

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{7}{\sqrt{58}}, -\frac{3}{\sqrt{58}} \right). \text{ Так как } \overline{AC} = (4; -4), \text{ то}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}, \text{ значит, } \mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$\text{Тогда } \overline{AL} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \left(\frac{7}{\sqrt{58}} + \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{58}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \left(\frac{7 + \sqrt{29}}{\sqrt{58}}, \frac{-3 - \sqrt{29}}{\sqrt{58}} \right). \text{ Уравнение прямой } m_3, \text{ проходящей}$$

через точку A с направляющим вектором $\overline{AL}$, имеет вид:

$$\frac{x - 1}{\frac{7 + \sqrt{29}}{\sqrt{58}}} = \frac{y - 1}{\frac{-3 - \sqrt{29}}{\sqrt{58}}}, \quad \frac{x - 1}{7 + \sqrt{29}} = \frac{y - 1}{-3 - \sqrt{29}},$$

$$(-3 - \sqrt{29})(x - 1) - (7 + \sqrt{29})(y - 1) = 0,$$

$$(-3 - \sqrt{29})x - (7 + \sqrt{29})y + 10 + 2\sqrt{29} = 0.$$

Итак, уравнение прямой m_3 имеет вид:

$$(-3 - \sqrt{29})x - (7 + \sqrt{29})y + 10 + 2\sqrt{29} = 0.$$

Выясним теперь взаимное расположение прямой M_1M_2 с прямыми m_1 , m_2 , m_3 :

1) $M_1M_2: 5x - y + 11 = 0$; $m_1: 3x + y - 4 = 0$. Так как $\frac{5}{3} \neq \frac{-1}{3}$,

то данные прямые пересекаются.

2) $M_1M_2: 5x - y + 11 = 0$; $m_2: 5x + y - 22 = 0$. Так как $\frac{5}{5} \neq \frac{-1}{1}$,

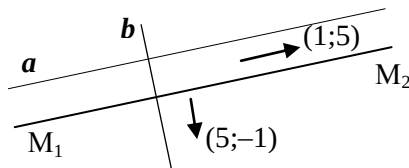
то данные прямые пересекаются.

3) $M_1M_2: 5x - y + 11 = 0$; $m_3: (-3 - \sqrt{29})x - (7 + \sqrt{29})y + 10 + 2\sqrt{29} = 0$.

Так как $\frac{5}{-3 - \sqrt{29}} \neq \frac{-1}{-7 - \sqrt{29}}$, то данные прямые пересекаются.

Ответ: прямая M_1M_2 пересекается с каждой из прямых m_1 , m_2 , и m_3 .

5) Уравнение прямой $M_1M_2: 5x - y + 11 = 0$.



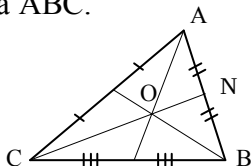
Так как прямая a параллельна прямой M_1M_2 , то ее уравнение имеет вид $5x - y + c_1 = 0$, причем $c_1 \neq 11$. По условию $A(1;1) \notin a$, следовательно, $5 \cdot 1 - 1 + c_1 \neq 0$, то есть $c_1 \neq -4$; $B(8;-2) \notin a$, следовательно, $5 \cdot 8 - (-2) + c_1 \neq 0$, то есть $c_1 \neq -42$; $C(5;-3) \notin a$, следовательно, $5 \cdot 5 - (-3) + c_1 \neq 0$, то есть $c_1 \neq -28$. Итак, $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{-42, -28, -4, 11\}$. Следовательно, уравнение прямой a может, например, иметь вид: $5x - y + 3 = 0$.

Так как прямая b перпендикулярна прямой M_1M_2 , то ее уравнение имеет вид $(-1)x - 5y + c_2 = 0$. По условию $A(1;1) \notin b$, следовательно, $(-1) \cdot 1 - 5 \cdot 1 + c_2 \neq 0$, то есть $c_2 \neq 6$;

$B(8;-2) \notin b$, следовательно, $(-1) \cdot 8 - 5 \cdot (-2) + c_2 \neq 0$, то есть $c_2 \neq -2$;
 $C(5;-3) \notin b$, следовательно, $(-1) \cdot 5 - 5 \cdot (-3) + c_2 \neq 0$, то есть $c_2 \neq 10$. Итак, $c_2 \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 10\}$. Следовательно, уравнение прямой b может, например, иметь вид: $-x - 5y + 7 = 0$, или $x + 5y - 7 = 0$.

Ответ: например, $5x - y + 3 = 0$ (прямая a)
 и $x + 5y - 7 = 0$ (прямая b).

6) Найдем координаты точки O – центра масс треугольника ABC .



Поскольку центр масс треугольника – это точка пересечения его медиан, а точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины, то $CO:ON=2:1$.

Поэтому $x_O = \frac{x_C + 2x_N}{3}$, $y_O = \frac{y_C + 2y_N}{3}$, где $C(x_C; y_C)$, $O(x_O; y_O)$,

$N(x_N; y_N)$. По условию задачи $C(5;-3)$; а координаты точки $N\left(\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ были найдены в пункте (4). Значит,

$$x_O = \frac{5 + 2 \cdot \frac{9}{2}}{3} = \frac{14}{3}, \quad y_O = \frac{(-3) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Итак, $O\left(\frac{14}{3}; -\frac{4}{3}\right)$, а уравнение прямой AB : $3x + 7y - 10 = 0$.

Тогда расстояние $\rho(O, AB)$ от точки O до прямой AB можно найти по формуле:

$$\rho(O, AB) = \frac{\left| 3 \cdot \frac{14}{3} + 7 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 10 \right|}{\sqrt{3^2 + 7^2}} = \frac{16}{3 \cdot \sqrt{58}} = \frac{8\sqrt{58}}{87}.$$

$$\text{Ответ: } \rho(O, AB) = \frac{8\sqrt{58}}{87}.$$

$$7) P_{ABC} = |\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{AC}|, S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \rho(C, AB) \cdot |\overline{AB}|.$$

$$\overline{AB} (7; -3), \text{ значит, } |\overline{AB}| = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58},$$

$$\overline{AC} (4; -4), \text{ значит, } |\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

$$\overline{BC} (-3; -1), \text{ значит, } |\overline{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}.$$

$$\text{Итак, } P_{ABC} = \sqrt{58} + 4\sqrt{2} + \sqrt{10}.$$

$$\rho(C, AB) = \frac{|3 \cdot 5 + 7 \cdot (-3) - 10|}{\sqrt{3^2 + 7^2}} = \frac{16}{\sqrt{58}} = \frac{8\sqrt{58}}{29}.$$

$$\text{Значит, } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{58}}{29} \cdot \sqrt{58} = 8.$$

$$\text{Ответ: } \frac{P_{ABC}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{58} + 4\sqrt{2} + \sqrt{10}}{8}.$$

8) Определим вид каждого из углов треугольника ABC.

$$\cos(\angle A) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{7 \cdot 4 + (-3) \cdot (-4)}{\sqrt{58} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{58} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{29}} > 0;$$

значит, $\angle A$ – острый.

$$\cos(\angle B) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{(-7) \cdot (-3) + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{10}} = \frac{18}{\sqrt{58} \cdot \sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{145}} > 0;$$

значит, $\angle B$ – острый.

$$\cos(\angle C) = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|} = \frac{(-4) \cdot 3 + 4 \cdot 1}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-8}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} < 0;$$

значит, $\angle C$ – тупой.

Следовательно, треугольник ABC – тупоугольный.

Так как $AB \neq BC$, $AB \neq AC$, $BC \neq AC$ (см. (7)), то треугольник ABC – разносторонний.

Ответ: треугольник ABC – тупоугольный разносторонний.

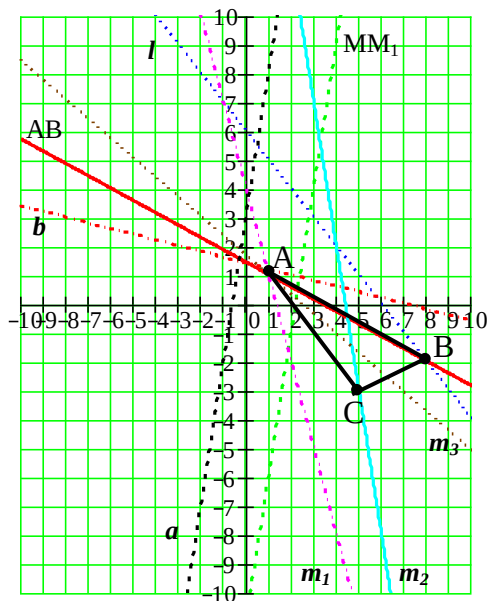
9) Выпишем все уравнения прямых, найденные при решении задачи, и построим эти прямые в системе координат.

$$AB: 3x+7y-10=0, \quad l: x+y-6=0,$$

$$MM_1: 5x-y+11=0, \quad m_1: 3x+y-4=0,$$

$$m_2: 5x+y-22=0, \quad m_3: (-3-\sqrt{29})x-(7+\sqrt{29})y+10+2\sqrt{29}=0,$$

$$a: 5x-y+3=0, \quad b: x+5y-7=0.$$



Тема 3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Задание 1. Постройте кривые второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат. Найдите:

для окружности координаты центра и радиус;

для эллипса координаты фокусов и уравнения директрис;

для гиперболы координаты фокусов, уравнения директрис и асимптот;

для параболы координаты фокуса и уравнение директрисы.

Изобразите фокусы, директрисы и асимптоты на чертеже.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 1

вариант	Кривые второго порядка				
	1	2	3	4	5
1	$(x-2)^2+(y-3)^2=9$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$	$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$	$y^2=8x$	$x^2-9y^2=0$
2	$(x+3)^2+(y-5)^2=4$	$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$	$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$	$x^2=-6y$	$y^2=9$
3	$(x+1)^2+(y-2)^2=16$	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$	$y^2=-8x$	$9x^2=0$
4	$(x-3)^2+(y+4)^2=25$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{25}=1$	$x^2=6y$	$y^2-9x^2=0$
5	$(x+3)^2+(y+3)^2=4$	$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$	$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$	$y^2=-2x$	$x^2=9$
6	$(x-1)^2+(y+1)^2=16$	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$	$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$	$x^2=4y$	$9y^2=0$
7	$(x+2)^2+(y-1)^2=36$	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$	$y^2=2x$	$x^2-4y^2=0$

8	$(x-4)^2+(y+2)^2=49$	$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$	$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$	$x^2=-4y$	$y^2=4$
9	$(x+4)^2+(y-4)^2=9$	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$	$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$	$y^2=10x$	$4x^2=0$
10	$(x-5)^2+(y+1)^2=4$	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$	$\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{9}=1$	$x^2=-12y$	$y^2-4x^2=0$
11	$(x+5)^2+(y-6)^2=16$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$	$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$	$y^2=-10x$	$x^2=4$
12	$(x-1)^2+(y+5)^2=1$	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$	$x^2=12y$	$4y^2=0$
13	$(x+1)^2+(y-3)^2=25$	$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$	$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1$	$y^2=-6x$	$x^2-16y^2=0$
14	$(x-3)^2+(y-2)^2=36$	$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$	$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{4}=1$	$x^2=-8y$	$y^2=16$
15	$(x+2)^2+(y+4)^2=49$	$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$	$y^2=6x$	$16x^2=0$
16	$(x-3)^2+(y-2)^2=9$	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$	$\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{16}=1$	$x^2=8y$	$y^2-16x^2=0$
17	$(x-5)^2+(y+3)^2=4$	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$	$y^2=4x$	$x^2=16$
18	$(x+1)^2+(y+1)^2=16$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$	$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$	$x^2=-2y$	$16y^2=0$
19	$(x+4)^2+(y-3)^2=25$	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$	$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1$	$y^2=-4x$	$x^2-25y^2=0$
20	$(x-3)^2+(y-3)^2=4$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1$	$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{36}=1$	$x^2=2y$	$y^2=25$
21	$(x+1)^2+(y-1)^2=16$	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$	$y^2=12x$	$25x^2=0$
22	$(x-1)^2+(y+2)^2=36$	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$	$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$	$x^2=-10y$	$y^2-25x^2=0$
23	$(x+2)^2+(y-4)^2=49$	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$	$y^2=-12x$	$x^2=25$
24	$(x-4)^2+(y+4)^2=9$	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$	$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1$	$x^2=10y$	$25y^2=0$

25	$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 4$	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 1$	$y^2 = 14x$	$x^2 - 36y^2 = 0$
26	$(x-6)^2 + (y+5)^2 = 16$	$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$	$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{36} = 1$	$x^2 = -16y$	$y^2 = 36$
27	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{49} = 1$	$y^2 = -14x$	$36x^2 = 0$
28	$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1$	$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{36} = 1$	$x^2 = 16y$	$y^2 - 36x^2 = 0$
29	$(x+4)^2 + (y+2)^2 = 49$	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$	$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$	$y^2 = -16x$	$x^2 = 36$
30	$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 1$	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$	$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{25} = 1$	$x^2 = 14y$	$36y^2 = 0$

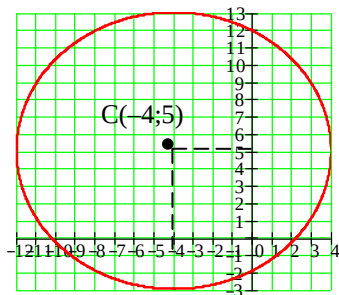
Пример. Постройте кривые второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат:

$$(x+4)^2 + (y-5)^2 = 64; \quad \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{64} = 1; \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad x^2 = -18y; \quad 9x^2 - 4y^2 = 0.$$

Найдите: для окружности координаты центра и радиус; для эллипса координаты фокусов и уравнения директрис; для гиперболы координаты фокусов, уравнения директрис и асимптот; для параболы координаты фокуса и уравнение директрисы. Изобразите фокусы, директрисы и асимптоты на чертеже.

Решение.

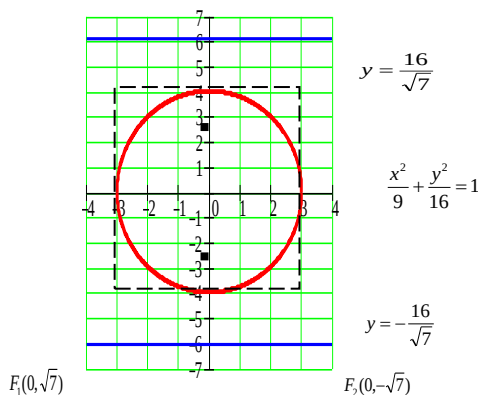
1) $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 64$ – уравнение окружности с центром в точке $C(-4;5)$ и радиусом $r = \sqrt{64} = 8$.



$$2) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ — уравнение эллипса; } a = \sqrt{9} = 3; \quad b = \sqrt{16} = 4.$$

Поскольку $a < b$, то фокусы эллипса лежат на оси Oy и имеют координаты $F_1(0; c)$ и $F_2(0; -c)$, где $c^2 = a^2 - b^2$, то есть $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$. Значит, координаты фокусов $F_1(0; \sqrt{7})$; $F_2(0; -\sqrt{7})$.

Найдем уравнения директрис эллипса: $y = \pm \frac{b^2}{c}$, то есть $y = \pm \frac{4^2}{\sqrt{7}} = \pm \frac{16}{\sqrt{7}}$.



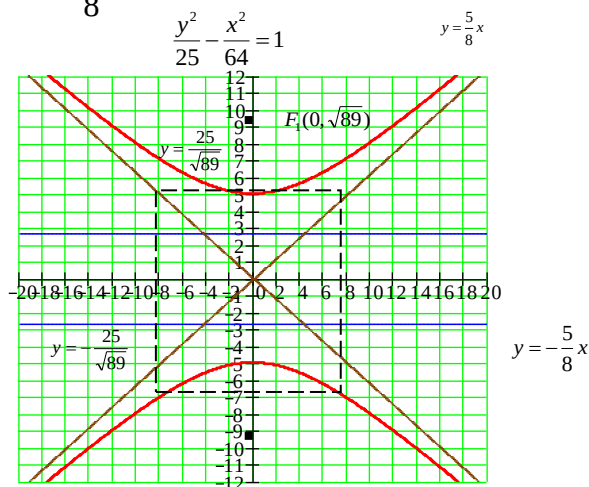
$$3) \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{64} = 1 \text{ — уравнение гиперболы с вершинами на}$$

оси Oy ; $a = \sqrt{64} = 8$; $b = \sqrt{25} = 5$. Найдем координаты фокусов $F_1(0; c)$ и $F_2(0; -c)$, где $c^2 = a^2 + b^2$, то есть

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}$. Значит, координаты фокусов: $F_1(0; \sqrt{89})$; $F_2(0; -\sqrt{89})$. Найдем уравнения директрис гиперболы: $y = \pm \frac{b^2}{c}$, то есть $y = \pm \frac{5^2}{\sqrt{89}} = \pm \frac{25}{\sqrt{89}}$. Найдем

уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm \frac{a}{b} x$, то есть

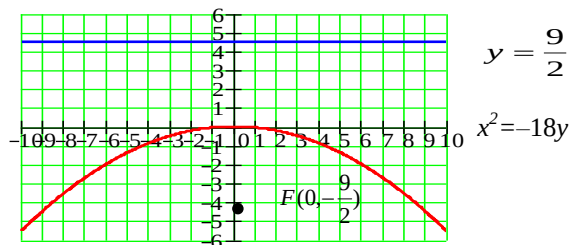
$$y = \pm \frac{5}{8} x.$$



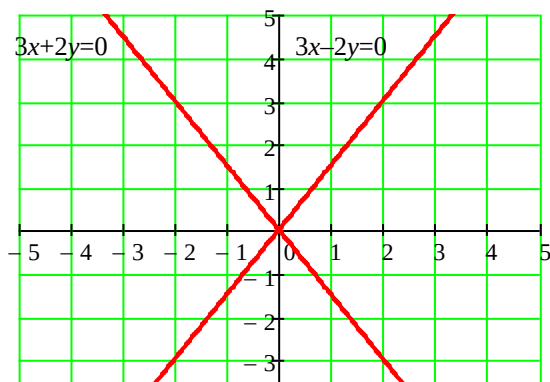
4) $x^2 = -18y$ – уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy . Найдем координаты фокуса $F(0; c)$:

$$c = \frac{-18}{2} = -\frac{9}{2}, \text{ то есть } F(0; -\frac{9}{2}). \text{ Найдем уравнение ди-}$$

$$\text{ректрисы параболы: } y = -\frac{18}{2} = \frac{9}{2}.$$



5) $9x^2 - 4y^2 = 0$, значит, $(3x - 2y)(3x + 2y) = 0$, значит, $3x - 2y = 0$ или $3x + 2y = 0$. Эта совокупность уравнений задает пару пересекающихся прямых.



Задание 2. Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и постройте ее в исходной системе координат.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 2

Вариант	Кривая второго порядка
1	$9y^2 - 4x^2 + 18y - 8x - 31 = 0$
2	$x^2 + 2y - 4x + 6 = 0$
3	$4y^2 + 9x^2 + 36x = 0$
4	$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$
5	$x^2 - 2x - 9y + 1 = 0$

6	$x^2 - 4x - 5 = 0$
7	$y^2 + 6y + 9 = 0$
8	$4y^2 - 25x^2 + 8y - 96 = 0$
9	$y^2 + 4x^2 - 2y - 8x + 1 = 0$
10	$y^2 + 2y - 3 = 0$
11	$x^2 - 10x + 25 = 0$
12	$x^2 + 2x - 3y + 7 = 0$
13	$9x^2 - 4y^2 - 36x + 16y - 16 = 0$
14	$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$
15	$x^2 - 8x + 16 = 0$
16	$9y^2 + x^2 - 2x - 8 = 0$
17	$x^2 - 12x + 20 = 0$
18	$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 = 0$
19	$y^2 + 8y + 15 = 0$
20	$y^2 - 9x^2 + 6y + 36x - 27 = 0$
21	$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0$
22	$y^2 + 2y - 4x - 10 = 0$
23	$y^2 - 4y + x + 8 = 0$
24	$4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$
25	$x^2 - 10x + 25 = 0$
26	$4y^2 - 9x^2 + 8y - 18x - 5 = 0$
27	$16x^2 - 25y^2 + 64x - 50y - 361 = 0$
28	$4y^2 - x^2 + 8y - 2x + 3 = 0$
29	$y^2 + 6y + x + 9 = 0$
30	$x^2 - y^2 + 8y - 16 = 0$

Пример. Приведите уравнение кривой второго порядка $16x^2 - 9y^2 + 160x + 54y + 175 = 0$ к каноническому виду и постройте ее в исходной системе координат.

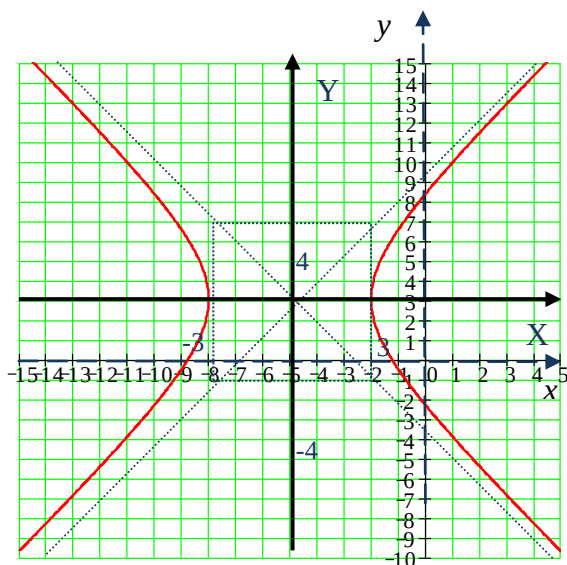
Решение. Для приведения уравнения к каноническому виду выделим полные квадраты относительно каждой переменной, используя формулы: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2a \cdot b + b^2$.

$$\begin{aligned}
 (16x^2+160x)-(9y^2-54y)+175 &= 16(x^2+10x)-9(y^2-6y)+175= \\
 &= 16(x^2+2\cdot 5x)-9(y^2-2\cdot 3y)+175=16(x^2+2\cdot 5x+5^2-5^2)-9(y^2- \\
 &-2\cdot 3y+3^2-3^2)+175=16(x^2+2\cdot 5x+5^2)-16\cdot 5^2-9(y^2-2\cdot 3y+3^2)+ \\
 &+9\cdot 3^2+175=16(x+5)^2-9(y-3)^2-144.
 \end{aligned}$$

Получаем уравнение: $16(x+5)^2-9(y-3)^2-144=0$. Отсюда $16(x+5)^2-9(y-3)^2=144$, то есть $\frac{16\cdot(x+5)^2}{144}-\frac{9\cdot(y-3)^2}{144}=1$,

или $\frac{(x+5)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1$.

Введем обозначения: $X=x+5$, $Y=y-3$. Тогда уравнение примет вид $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{16}=1$ – каноническое уравнение гиперболы. Выполним построение.



Сначала построим в системе координат XOY гиперболу, заданную уравнением $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{16}=1$. Затем выполним параллельный перенос: $X=x+5$, $Y=y-3$, то есть сместим систему

координат вдоль оси OX вправо на 5 единиц и вдоль оси OY вниз на 3 единицы.

Задание 3. Постройте данные области в прямоугольной системе координат.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 3

Вариант	Задание области
1	$\begin{cases} x^2 \leq (y+1); \\ 5x + 2y - 10 \leq 0; \\ y \geq 1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} \geq 1; \\ 2x + 3y - 12 \leq 0; \\ 2x - 3y + 12 \geq 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1; \\ x^2 \leq y; \\ 5x - 3y + 15 \geq 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x^2 \geq -y; \\ (x-4)^2 \leq -y; \\ y \leq 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} y \geq \frac{1}{x}; \\ x - y \geq 0; \\ x \leq 4 \end{cases}$
6	$\begin{cases} (y-1)^2 \leq x; \\ (x-4)^2 + (y+4)^2 \geq 16; \\ x \leq 4 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \geq 1; \\ x^2 - y^2 \geq 1; \\ x + 5 \geq 0 \end{cases}$

8	$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \geq 4; \\ y^2 \leq -(x-2); \\ x \geq -2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} y^2 - \frac{x^2}{4} \leq 1; \\ x - 3y - 9 \leq 0; \\ y \leq -1 \end{cases}$
10	$\begin{cases} y^2 \leq -(x-2); \\ (x-2)^2 \leq y; \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x^2 \geq -(y-4); \\ 2x - y - 4 \leq 0; \\ y - 4 \leq 0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} y \geq -\frac{1}{x}; \\ x - 2 \geq 0; \\ 3x + 4y \leq 12 \end{cases}$
13	$\begin{cases} (y+2)^2 \geq -x; \\ x \leq 0; \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} x^2 \geq -(y-2); \\ x^2 \leq y+2; \\ y - 4 \leq 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-2)^2 \geq 1; \\ (y-5)^2 \geq (x-5)^2; \\ y \geq 0 \end{cases}$
16	$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} \leq 1; \\ \frac{x^2}{4} - y^2 \leq 1; \\ y^2 - \frac{x^2}{4} \leq 1. \end{cases}$

17	$\begin{cases} y \geq \frac{1}{x}; \\ x - 5 \leq 0; \\ y - 4 \leq 0 \end{cases}$
18	$\begin{cases} (x + 3)^2 \leq -(y - 2); \\ 7x + 3y + 21 \leq 0; \\ 7x - 3y - 21 \leq 0 \end{cases}$
19	$\begin{cases} (y - 6)^2 \geq x; \\ y^2 \geq x; \\ x \geq 0 \end{cases}$
20	$\begin{cases} (y - 1)^2 \geq x + 1; \\ x + 1 \geq 0; \\ 4x + 3y - 11 \leq 0 \end{cases}$
21	$\begin{cases} (y - 1)^2 \leq -(x - 4); \\ y^2 \geq x; \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$
22	$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \geq 1; \\ (x - 4)^2 + y^2 \geq 1; \\ x - 6 \leq 0. \end{cases}$
23	$\begin{cases} \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} \leq 1; \\ (x - 1)^2 + y^2 \geq 1; \\ x \geq 0. \end{cases}$
24	$\begin{cases} y^2 \geq -(x + 1); \\ y^2 \leq x + 3; \\ x - 2 \leq 0 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x^2 \geq y; \\ x^2 + (y - 3)^2 \geq 1; \\ y - 3,5 \leq 0. \end{cases}$
26	$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4; \\ x^2 + (y - 6)^2 \geq 4; \\ x^2 \leq 4. \end{cases}$

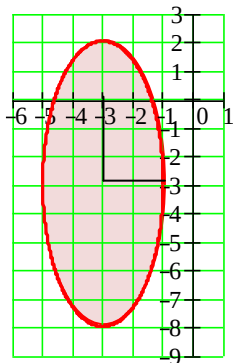
27	$\begin{cases} (x-2)^2 \geq y-2; \\ (x-2)^2 \geq y+2; \\ (x-2)^2 \leq 4. \end{cases}$
28	$\begin{cases} y^2 \geq x+4; \\ x-3y+6 \geq 0; \\ x+3y+6 \geq 0 \end{cases}$
29	$\begin{cases} y \geq \frac{1}{x}; \\ x^2 \leq y-3; \\ y-5 \leq 0. \end{cases}$
30	$\begin{cases} \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} \leq 1; \\ x^2 \leq 9; \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1; \end{cases}$

Пример. Постройте в прямоугольной системе координат область

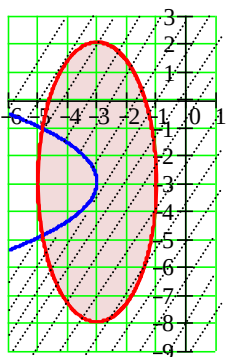
$$\begin{cases} \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} \leq 1; \\ -2(x+3) \leq (y+3)^2; \\ x-2y \geq 4. \end{cases}$$

Решение. Неравенство $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} \leq 1$ задает область на плоскости, а уравнение $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$ – ее границу, которая является эллипсом. Построим его в прямоугольной системе координат. Для этого сдвинем эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ вдоль осей координат: по Ox на 3 единицы влево и по Oy на 3 единицы вниз. Эллипс разделил координатную плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Для определения нужной области выберем произвольную точку, не лежащую на границе области, и подставим ее координаты в неравенство. Если координаты выбранной точ-

ки удовлетворяют неравенству, то закрашиваем область, которой принадлежит выбранная точка, иначе – область, которой эта точка не принадлежит. Например, выберем точку $M(0;0)$. Проверим, что она не принадлежит границе области: $\frac{(0+3)^2}{4} + \frac{(0+3)^2}{25} \neq 1$, значит, $M(0;0)$ не принадлежит эллипсу. Теперь подставим ее координаты в неравенство $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} \leq 1$: $\frac{(0+3)^2}{4} + \frac{(0+3)^2}{25} \leq 1$, $\frac{9}{4} + \frac{9}{25} \leq 1$, $\frac{9(25+4)}{100} = \frac{261}{100} \leq 1$. Последнее неравенство неверно. Значит, выбираем ту часть плоскости, которой точка M не принадлежит, то есть внутреннюю область эллипса.



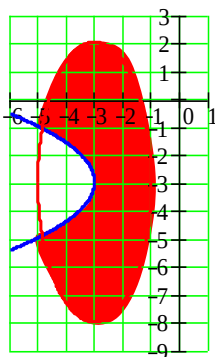
Неравенство $-2(x+3) \leq (y+3)^2$ также задает область на плоскости, а уравнение $-2(x+3) = (y+3)^2$ – ее границу, которая является параболой. Построим ее в прямоугольной системе координат. Для этого сдвинем параболу $-2x = y^2$ вдоль осей координат: по Ox на 3 единицы влево и по Oy на 3 единицы вниз. Парабола разделила координатную плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Так же, как в предыдущем случае, можно проверить, что неравенство $-2(x+3) \leq (y+3)^2$ задает внешнюю область параболы.



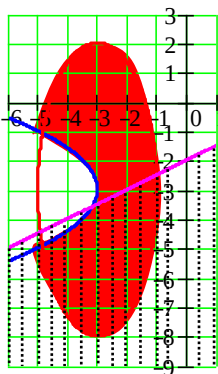
Тогда система

$$\begin{cases} \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} \leq 1 \\ -2(x+3) \leq (y+3)^2 \end{cases}$$

будет задавать область, являющуюся пересечением областей, задаваемых каждым из неравенств отдельно.



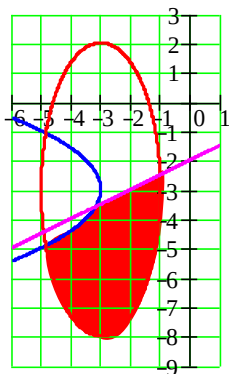
Неравенство $x-2y \geq 4$ также задает область на плоскости, а ее границей является прямая $x-2y=4$. Построим ее в прямоугольной системе координат. Убедимся, что неравенство $x-2y \geq 4$ задает нижнюю полуплоскость относительно прямой $x-2y=4$.



Итак, система

$$\begin{cases} \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} \leq 1 \\ -2(x+3) \leq (y+3)^2 \\ x-2y \geq 4 \end{cases}$$

задает область, являющуюся пересечением трех областей, задаваемых каждым из неравенств отдельно.



Тема 4. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Задания.

- 1) Доказать, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.
- 2) Составить уравнения плоскостей, содержащих грани пирамиды $ABCD$.
- 3) Составить уравнение плоскости, проходящей через вершину D параллельно грани ABC .
- 4) Составить уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD .
- 5) Составить канонические уравнения прямой, содержащей ребро CD .
- 6) Составить общие уравнения прямой, проходящей через точку B параллельно ребру AC .
- 7) Найти объем пирамиды $ABCD$.
- 8) Найти длину высоты DH пирамиды $ABCD$.
- 9) Найти площадь грани ABC пирамиды $ABCD$.
- 10) Найти величину угла между плоскостями ABC и ABD .
- 11) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB .
- 12) Составить параметрические уравнения прямой, содержащей высоту DH пирамиды $ABCD$.
- 13) Найти координаты основания высоты DH пирамиды $ABCD$.

ВАРИАНТЫ УСЛОВИЙ К ЗАДАНИЯМ

- | | | | | |
|----|---------------|----------------|---------------|---------------|
| 1. | $A(-2;1;1);$ | $B(-5;1;-2);$ | $C(-3;0;3);$ | $D(-6;0;1).$ |
| 2. | $A(-3;-4;1);$ | $B(-2;-3;-5);$ | $C(0;0;0);$ | $D(-6;0;3).$ |
| 3. | $A(-2;4;5);$ | $B(1;3;-4);$ | $C(-5;-5;1);$ | $D(-1;2;-2).$ |
| 4. | $A(-1;2;0);$ | $B(-4;2;-3);$ | $C(-2;1;2);$ | $D(-5;1;0).$ |
| 5. | $A(-2;-3;0);$ | $B(-1;-2;-6);$ | $C(1;1;-1);$ | $D(-5;1;2).$ |

6. $A(-1;5;-6); B(2;4;-5); C(-4;-4;0); D(0;3;-3).$
7. $A(-3;2;2); B(-6;2;-1); C(-4;1;4); D(-7;1;2).$
8. $A(-4;-3;2); B(-3;-2;-4); C(-1;1;1); D(-7;1;4).$
9. $A(-3;5;-4); B(0;4;-3); C(-6;-4;2); D(-2;3;-1).$
10. $A(0;1;1); B(-3;1;-2); C(-1;0;3); D(-4;0;1).$
11. $A(1;-2;1); B(1;-5;-2); C(0;-3;3); D(0;-6;1).$
12. $A(-4;-3;1); B(-3;-2;-5); C(0;0;0); D(0;-6;3).$
13. $A(4;-2;-5); B(3;1;-4); C(-5;-5;1); D(2;-1;-2).$
14. $A(2;-1;0); B(2;-4;-3); C(1;-2;2); D(1;-5;0).$
15. $A(-3;-2;0); B(-2;-1;-6); C(1;1;-1); D(1;-5;2).$
16. $A(5;-1;-6); B(4;2;-5); C(-4;-4;0); D(3;0;-3).$
17. $A(2;-3;2); B(2;-6;-1); C(1;-4;4); D(1;-7;2).$
18. $A(-3;-4;2); B(-2;-3;-4); C(1;-1;1); D(1;-7;4).$
19. $A(5;-3;-4); B(4;0;-3); C(-4;-6;2); D(3;-2;-1).$
20. $A(1;0;1); B(1;-3;-2); C(0;-1;3); D(0;-4;1).$
21. $A(1;0;1); B(-2;1;-5); C(3;0;-3); D(1;0;-6).$
22. $A(1;-4;-3); B(-5;-3;-2); C(0;0;0); D(3;0;-6).$
23. $A(-5;4;-2); B(-4;3;1); C(1;-5;-5); D(-2;2;-1).$
24. $A(0;2;-1); B(-3;2;-4); C(2;1;-2); D(0;1;-5).$
25. $A(0;-3;-2); B(-6;-2;-1); C(-1;1;1); D(2;1;-5).$
26. $A(-6;5;-1); B(-5;4;2); C(0;-4;-4); D(-3;3;0).$
27. $A(2;2;-3); B(-1;2;-6); C(4;1;-4); D(2;1;-7).$
28. $A(2;-3;-4); B(-4;-2;-3); C(1;1;-1); D(4;1;-7).$
29. $A(-4;5;-3); B(-3;4;0); C(2;-4;-6); D(-1;3;-2).$
30. $A(1;1;0); B(-2;1;-3); C(3;0;-1); D(1;0;-4).$

Пример.

Пусть $A(-5;-3;-2), B(3;0;-6), C(1;-4;-3), D(0;0;0).$

1) Докажем, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Это можно сделать двумя способами: проверить, что одна из точек не лежит в плоскости, проходящей через три другие точки, или проверить, что векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ не компланарны.

Первый способ. Воспользуемся тем, что уравнение плоскости, проходящей через точки с координатами $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим, например, уравнение плоскости ABC. Тогда $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$ – это координаты точек A, B и C соответственно. Получаем уравнение:

$$\begin{vmatrix} x - (-5) & y - (-3) & z - (-2) \\ 3 - (-5) & 0 - (-3) & -6 - (-2) \\ 1 - (-5) & -4 - (-3) & -3 - (-2) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x + 5 & y + 3 & z + 2 \\ 8 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x+5) \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (y+3) \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + (z+2) \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$(x+5)(-7) - (y+3) \cdot 16 + (z+2)(-26) = 0$. Окончательно получаем уравнение плоскости ABC: $7x + 16y + 26z + 135 = 0$. Проверим, удовлетворяют ли этому уравнению координаты точки D: $7 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 26 \cdot 0 + 135 = 135 \neq 0$. Значит, точка D не лежит в плоскости ABC, то есть точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

Второй способ. Воспользуемся тем, что вектор не компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Запишем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$: $\overline{AB} = (8; 3; -4)$, $\overline{AC} = (6; -1; -1)$, $\overline{AD} = (5; 3; 2)$.

$$\text{Тогда } \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -135 \neq 0. \text{ Значит, данные}$$

векторы не компланарны, поэтому точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать. •

2) Составим уравнения плоскостей, содержащих грани пирамиды ABCD. Этих граней четыре, уравнение одной из плоскостей уже есть: $7x+16y+26z+135=0$ – уравнение плоскости ABC.

Теперь по тому же правилу составим уравнение плоскости ABD:

$$\begin{vmatrix} x+5 & y+3 & z+2 \\ 8 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, (x+5) \cdot 18 - (y+3) \cdot 36 + (z+2) \cdot 9 = 0,$$

$(x+5) \cdot 2 - (y+3) \cdot 4 + (z+2) = 0$. Окончательно: $2x-4y+z=0$ – уравнение плоскости ABD.

Составим уравнение плоскости ACD:

$$\begin{vmatrix} x+5 & y+3 & z+2 \\ 6 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, (x+5) - (y+3) \cdot 17 + (z+2) \cdot 23 = 0.$$

Окончательно: $x-17y+23z=0$ – уравнение плоскости ACD.

Составим уравнение плоскости BCD:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+6 \\ -2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0, (x-3)(-24) - y(-3) + (z+6)(-12) = 0,$$

$(x-3) \cdot 8 - y + (z+6) \cdot 4 = 0$. Окончательно: $8x-y+4z=0$ – уравнение плоскости BCD.

Ответ. ABC: $7x+16y+26z+135=0$; ABD: $2x-4y+z=0$;

ACD: $x-17y+23z=0$; BCD: $8x-y+4z=0$. •

3) Составим уравнение плоскости, проходящей через вершину D параллельно грани ABC. Для этого воспользуемся тем, что уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами $(x_0; y_0; z_0)$ параллельно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, имеет вид: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Плоскость ABC имеет уравнение $7x+16y+26z+135=0$, точка

D имеет координаты (0;0;0). Значит, уравнение искомой плоскости: $7(x-0)+16(y-0)+26(z-0)=0$.

Ответ: $7x+16y+26z=0$.•

4) Составим уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD. Для этого воспользуемся тем, что уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами $(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\mathbf{n}=(A; B; C)$, имеет вид: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. В данном случае в качестве точки $(x_0; y_0; z_0)$ можно взять любую из точек A и B, а нормальный вектор $\mathbf{n}$ плоскости будет перпендикулярен неколлинеарным векторам $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, а значит, вектор $\mathbf{n}$ коллинеарен их векторному произведению $\overline{AB} \times \overline{CD}$. Поскольку $\overline{AB}=(8; 3; -4)$ и $\overline{CD}=(-1; 4; 3)$, то

$$\overline{AB} \times \overline{CD} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 8 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 25\bar{i} - 20\bar{j} + 35\bar{k}. \text{ В качестве нормаль-}$$

ного вектора удобно взять коллинеарный ему вектор $\mathbf{n}=(5; -4; 7)$. Возьмем в качестве точки $(x_0; y_0; z_0)$, например, точку B(3;0;-6). Тогда уравнение искомой плоскости имеет вид: $5(x-3)-4(y-0)+7(z+6)=0$.

Ответ: $5x-4y+7z+27=0$.•

5) Составим канонические уравнения прямой, содержащей ребро CD. Для этого воспользуемся тем, что канонические уравнения прямой, проходящей через точки

$(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. В

данном случае $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ – это точки C(1;-4;-3) и

D(0;0;0). Получаем уравнения: $\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+4}{0+4} = \frac{z+3}{0+3}$.

Ответ: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{3}$.•

6) Составим общие уравнения прямой, проходящей через точку В параллельно ребру АС. Для этого сначала составим канонические уравнения искомой прямой. Воспользуемся тем, что канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ с направляющим вектором $\mathbf{a}=(a_x; a_y; a_z)$, имеют вид: $\frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$. Точка

$(x_0; y_0; z_0)$ – это точка В(3;0;-6), $\mathbf{a}=\overline{AC}=(6;-1;-1)$. Получаем уравнения: $\frac{x-3}{6} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-(-6)}{-1}$. Чтобы получить общие

уравнения прямой, перепишем канонические уравнения в

виде системы:
$$\begin{cases} \frac{x-3}{6} = \frac{y-0}{-1} \\ \frac{y-0}{-1} = \frac{z-(-6)}{-1} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x+6y-3=0 \\ y-z-6=0 \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} x+6y-3=0 \\ y-z-6=0 \end{cases} \bullet$

7) Найдем объем пирамиды ABCD. Воспользуемся тем, что этот объем в 6 раз меньше, чем объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. А объем такого параллелепипеда равен модулю смешанного произведения этих векторов. В первом примере мы нашли, что $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = -135$. Значит, объем параллелепипеда равен 135, а объем пирамиды равен $135:6=22,5$.

Ответ: 22,5. •

8) Найдем длину высоты ДН пирамиды ABCD. Эта высота равна расстоянию от точки D до плоскости, содержащей противоположную грань, то есть до плоскости ABC. Воспользуемся тем, что расстояние от точки $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равно $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Так

как плоскость ABC имеет уравнение $7x+16y+26z+135=0$ и $D(0;0;0)$, то это расстояние равно $\frac{|7 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 26 \cdot 0 + 135|}{\sqrt{7^2 + 16^2 + 26^2}} = \frac{135}{\sqrt{981}} = \frac{45}{\sqrt{109}}.$

Ответ: $\frac{45}{\sqrt{109}}.$ •

9) Найдем площадь грани ABC пирамиды ABCD. Это можно сделать двумя способами: используя векторное произведение или используя выражение объема пирамиды через площадь основания и высоту.

Первый способ. Площадь треугольника ABC – это половина площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. А площадь такого параллелограмма равна модулю векторного произведения этих векторов. Так как

$$\overline{AB}=(8;3;-4) \text{ и } \overline{AC}=(6;-1;-1), \text{ то } \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 8 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$=-7\bar{i}-16\bar{j}-26\bar{k}$, а $|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{981} = 3\sqrt{109}$ – это площадь параллелограмма. А площадь треугольника равна $1,5\sqrt{109}$.

Второй способ. Объем пирамиды ABCD равен $\frac{SH}{3}$,

где S – площадь грани ABC, а H – высота, проведенная к этой грани. Поскольку объем пирамиды равен 22,5 (пример 7), а высота равна $\frac{45}{\sqrt{109}}$ (пример 8), то $S=3 \cdot 22,5 \cdot \frac{45}{\sqrt{109}} =$

$$= \frac{3 \cdot 22,5 \sqrt{109}}{45} = \frac{3\sqrt{109}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{109}}{2} . \bullet$$

10) Найдем величину угла между плоскостями ABC и ABD. Косинус угла φ между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, равен

$$\frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} . \text{ Плоскости ABC и ABD}$$

имеют уравнения $7x+16y+26z+135=0$ и $2x-4y+z=0$, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{|7 \cdot 2 + 16 \cdot (-4) + 26 \cdot 1|}{\sqrt{7^2 + 16^2 + 26^2} \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{|-24|}{\sqrt{981} \sqrt{21}} = \frac{8}{\sqrt{2289}} .$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{8}{\sqrt{2289}} . \bullet$$

11) Составим уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB. Для этой плоскости нормальный вектор $\mathbf{n} = \overline{AB} = (8; 3; -4)$, а $D(0; 0; 0)$. Значит, уравнение плоскости: $8(x-0)+3(y-0)-4(z-0)=0$.

$$\text{Ответ: } 8x+3y-4z=0 . \bullet$$

12) Составим параметрические уравнения прямой, содержащей высоту DH пирамиды ABCD. Для этого сначала составим канонические уравнения искомой прямой. Воспользуемся тем, что канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ с направляющим вектором $\mathbf{a}=(a_x; a_y; a_z)$, имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z} . \text{ Точка}$$

$(x_0; y_0; z_0)$ – это точка $D(0; 0; 0)$. А так как прямая DH перпендикулярна грани ABC, то ее направляющий вектор $\mathbf{a}$ – это нормальный вектор плоскости ABC. Плоскость ABC имеет уравнение $7x+16y+26z+135=0$. Значит, $\mathbf{a} = (7; 16; 26)$. Полу-

чаем канонические уравнения прямой DH: $\frac{x}{7} = \frac{y}{16} = \frac{z}{26} .$

Чтобы получить параметрические уравнения прямой ДН, обозначим каждую из этих равных дробей через t , тогда

получим:
$$\begin{cases} x = 7t \\ y = 16t \\ z = 26t \\ t \in R \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = 7t \\ y = 16t \\ z = 26t \\ t \in R \end{cases} \bullet$$

13) Найдем координаты основания высоты ДН пирамиды ABCD. Искомая точка лежит на прямой ДН и в плоскости ABC, значит, ее координаты удовлетворяют

уравнениям
$$\begin{cases} x = 7t \\ y = 16t \\ z = 26t \\ t \in R \end{cases}$$
 и $7x + 16y + 26z + 135 = 0$. Подставим вы-

ражения для x , y и z в уравнение плоскости ABC:

$$7 \cdot 7t + 16 \cdot 16t + 26 \cdot 26t + 135 = 0, 981t = -135, t = -\frac{15}{109}.$$

Теперь най-

дем координаты искомой точки: $x = -\frac{15}{109} \cdot 7, y = -\frac{15}{109} \cdot 16,$

$$z = -\frac{15}{109} \cdot 26.$$

Ответ:
$$\left(-\frac{105}{109}; -\frac{240}{109}; -\frac{390}{109}\right) \bullet$$

Тема 5. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ
ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задание 1.

Вычислить определители матриц A и B.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 1

Вариант	Матрица A	Матрица B
1.	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

5.	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \\ -6 & 4 & -9 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

11.	$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
14.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
16.	$\begin{pmatrix} 9 & -5 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

17.	$\begin{pmatrix} 10 & -8 & 0 \\ 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
18.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
19.	$\begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
20.	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
21.	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$
22.	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

23.	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -9 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
24.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
25.	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
26.	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 7 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & -6 \\ 4 & 0 & 6 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
27.	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
28.	$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 9 \\ 9 & -7 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

29.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
30.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ -3 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Пример

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. Воспользуемся формулой определи-

теля 3-го порядка: если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то $|A| =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}).$$

По этой формуле $|A| = 5 \cdot 0 \cdot 7 + 3 \cdot 0 \cdot 4 + (-1) \cdot (-6) \cdot (-2) - ((-1) \cdot 0 \cdot 4 +$
 $+ 3 \cdot (-6) \cdot 7 + 5 \cdot 0 \cdot (-2)) = 0 + 0 - 12 - (0 - 126 + 0) = -12 + 126 = 114.$

Заметим, что этот определитель можно найти быстрее, если разложить его по второй строке, воспользовавшись формулой:

$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$. По этой формуле

$$|A| = -6A_{21} + 0A_{22} + 0A_{23} = -6(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 6(21 - 2) = 114.$$

Ответ: $|A| = 114$.

б) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 12 \\ -3 & 4 & -4 & 5 \\ -4 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Чтобы упростить вычисления,

преобразуем определитель так, чтобы в какой-то строке (или столбце) все числа, кроме, быть может, одного, были равны нулю. Для этого воспользуемся одним из свойств определителя: определитель не меняется, если к строке прибавить другую строку, умноженную на число (или к столбцу прибавить другой столбец, умноженный на число). Например, можно взять второй столбец и преобразовать его так, чтобы все элементы, кроме четвертого, равнялись нулю. Для этого надо сначала к первой строке прибавить четвертую, умноженную на 2, а затем к третьей строке прибавить четвертую, умноженную на -4 . Получим:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 + (-4) \cdot 2 & -2 + 1 \cdot 2 & 3 + 7 \cdot 2 & 2 + 0 \cdot 2 \\ 4 & 0 & 5 & 12 \\ -3 + (-4) \cdot (-4) & 4 + 1 \cdot (-4) & -4 + 7 \cdot (-4) & 5 + 0 \cdot (-4) \\ -4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -6 & 0 & 17 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 12 \\ 13 & 0 & -32 & 5 \\ -4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}. \text{ Разложим определитель по второму}$$

столбцу: $|B| = b_{42}A_{42} = 1 \cdot (-1)^{4+2}M_{42} = \begin{vmatrix} -6 & 17 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \\ 13 & -32 & 5 \end{vmatrix}$. Этот оп-

ределитель тоже можно преобразовать: прибавим ко второй строке первую, умноженную на -6 , а к третьей строке – первую, умноженную на $-2,5$:

$$|B| = \begin{vmatrix} -6 & 17 & 2 \\ 4 + (-6)(-6) & 5 + 17(-6) & 12 + 2(-6) \\ 13 + (-6)(-2,5) & -32 + 17(-2,5) & 5 + 2(-2,5) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -6 & 17 & 2 \\ 40 & -97 & 0 \\ 28 & -74,5 & 0 \end{vmatrix}. \text{ Этот определитель разложим по третьему}$$

столбцу: $|B| = 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 40 & -97 \\ 28 & -74,5 \end{vmatrix} = 2(-2980 + 2716) = -528.$

Ответ: $|B| = -528.$ •

Задание 2.

Для данных матриц A и B указать, какие из операций выполнимы, и выполнить их: 1) $A+B$; 2) A^T+B ; 3) $A+B^T$; 4) A^T+B^T ; 5) AB ; 6) A^TB ; 7) AB^T ; 8) BA^T .

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 2

Вариант	Матрица А	Матрица В
1.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 13 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & -2 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

4.	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 9 & -8 & 0 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 13 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

13.	$\begin{pmatrix} -5 & -3 & 7 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$
14.	$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 9 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 7 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$
16.	$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 9 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 4 & -7 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
17.	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 9 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$
18.	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$
19.	$\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 10 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$
20.	$\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$
21.	$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 3 & 7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -7 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

22.	$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 4 & -9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$
23.	$\begin{pmatrix} -8 & 6 & 3 \\ -4 & 9 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 4 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$
24.	$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$
25.	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -5 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
26.	$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
27.	$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 8 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$
28.	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & -7 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
29.	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 11 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
30.	$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & -3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ -9 & 7 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 0 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}.$$

1) Поскольку A – 2×3 -матрица, а B – 3×2 -матрица, то найти сумму $A+B$ нельзя: складывать можно только матрицы одного размера.

2) Чтобы записать матрицу A^T , нужно строки матрицы A

поменять местами с ее столбцами: $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -2 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ – это

3×2 -матрица, как и матрица B . Поэтому сумму A^T+B найти можно. Сложение матриц выполняется поэлементно:

$$A^T+B = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -2 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 0 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+7 & -9+9 \\ -2+2 & 7+0 \\ 8+(-4) & 3+13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

3) $B^T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 9 & 0 & 13 \end{pmatrix}$ – это 2×3 -матрица, как и матрица A . По-

этому сумму $A+B^T$ найти можно: $A+B^T =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ -9 & 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 9 & 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+7 & -2+2 & 8-4 \\ -9+9 & 7+0 & 3+13 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 16 \end{pmatrix}.$$

Из предыдущего пункта видно, что $A+B^T = (A^T+B)^T$. Действительно, используя свойства операции транспонирования, можно получить: $(A^T+B)^T = (A^T)^T + (B)^T = A+B^T$.

4) Из двух предыдущих пунктов видно, что A^T – 3×2 -матрица, а B^T – 2×3 -матрица. Значит, сумму A^T+B^T найти нельзя, поскольку слагаемые – матрицы разного размера.

5) Чтобы матрицы можно было перемножить, число столбцов первого множителя должно равняться числу строк второго множителя. Поскольку A – 2×3 -матрица, а B – 3×2 -матрица, то найти произведение AB можно. Воспользуемся правилом умножения матриц: если A – $m \times n$ -матрица, а B – $n \times k$ -матрица, то их произведение $AB = (c_{ij})$ – $m \times k$ -матрица, элементы которой находят по формуле: $c_{ij} = \bar{a}_i \bar{b}^j$ (скалярное произведение i -ой строки матрицы A и j -ого столбца

матрицы B). Тогда $AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ -9 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 0 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 7 + (-2) \cdot 2 + 8 \cdot (-4) & 0 \cdot 9 + (-2) \cdot 0 + 8 \cdot 13 \\ -9 \cdot 7 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) & -9 \cdot 9 + 7 \cdot 0 + 3 \cdot 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & 104 \\ -61 & -42 \end{pmatrix}.$$

6) A^T – 3×2 -матрица, B – 3×2 -матрица. Число столбцов первой матрицы (2) не равно числу строк второй матрицы (3). Поэтому произведение $A^T B$ найти нельзя.

7) A – 2×3 -матрица, B^T – 2×3 -матрица. Число столбцов первой матрицы (3) не равно числу строк второй матрицы (2). Поэтому произведение AB^T найти нельзя.

8) B – 3×2 -матрица, A^T – 3×2 -матрица. Число столбцов первой матрицы (2) не равно числу строк второй матрицы (3). Поэтому произведение BA^T найти нельзя.

Ответ:

$$A^T + B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}; A + B^T = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 16 \end{pmatrix}; AB = \begin{pmatrix} -36 & 104 \\ -61 & -42 \end{pmatrix};$$

остальные операции невыполнимы.

Задание 3.

Для данной матрицы A найти обратную, если она существует, и сделать проверку: убедиться, что $AA^{-1} = E$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 3

Вариант	Матрица А	Вариант	Матрица А
1.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	2.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
3.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	4.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
5.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	6.	$A = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
7.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	8.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
9.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	10.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
11.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	12.	$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$
13.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	14.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

15.	$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	16.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
17.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	18.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
19.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	20.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
21.	$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	22.	$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
23.	$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$	24.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 10 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
25.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	26.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
27.	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	28.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
29.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$	30.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Найдем матрицу } A^{-1}.$$

Первый способ.

Чтобы найти матрицу, обратную матрице A порядка n , записывают рядом A и E , а затем к полученной $n \times 2n$ -матрице применяют элементарные преобразования строк так, чтобы матрица A превратилась в единичную матрицу. При этом на месте матрицы E появится матрица A^{-1} .

$$\text{Запишем: } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -3 , а к третьей строке – первую, умноженную на 2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на 3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

Умножим третью строку на $-0,2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1,4 & -0,6 & -0,2 \end{array} \right).$$

Прибавим к первой строке третью, умноженную на -1 , а ко второй строке – третью, умноженную на 4 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -0,4 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & -1 & 0 & 2,6 & -1,4 & -0,8 \\ 0 & 0 & 1 & 1,4 & -0,6 & -0,2 \end{array} \right).$$

Умножим вторую строку на -1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -0,4 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0 & -2,6 & 1,4 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 & 1,4 & -0,6 & -0,2 \end{array} \right).$$

Прибавим к первой строке вторую, умноженную на -1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2,2 & -0,8 & -0,6 \\ 0 & 1 & 0 & -2,6 & 1,4 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 & 1,4 & -0,6 & -0,2 \end{array} \right). \text{ Слева – матрица } E.$$

$$\text{Значит, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2,2 & -0,8 & -0,6 \\ -2,6 & 1,4 & 0,8 \\ 1,4 & -0,6 & -0,2 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,2 & -0,8 & -0,6 \\ -2,6 & 1,4 & 0,8 \\ 1,4 & -0,6 & -0,2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2,2 + (-2,6) + 1,4 & -0,8 + 1,4 + (-0,6) & -0,6 + 0,8 + (-0,2) \\ 6,6 + (-5,2) + (-1,4) & -2,4 + 2,8 + 0,6 & -1,8 + 1,6 + 0,2 \\ -4,4 + (-2,6) + 7 & 1,6 + 1,4 + (-3) & 1,2 + 0,8 + (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $AA^{-1}=E$. Значит, матрица A^{-1} найдена верно.

Второй способ.

Матрицу, обратную матрице A , можно найти по формуле: $A^{-1}=(b_{ij})$, где $b_{ij} = \frac{1}{|A|} A_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; |A| = 10 + 2 + 3 - (-4 - 1 + 15) = 15 - 10 = 5.$$

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11; A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4; A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -13; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 7; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 & -4 & -3 \\ -13 & 7 & 4 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,2 & -0,8 & -0,6 \\ -2,6 & 1,4 & 0,8 \\ 1,4 & -0,6 & -0,2 \end{pmatrix}. \quad \text{Результат,}$$

конечно, получился тот же, что и в первом случае.

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2,2 & -0,8 & -0,6 \\ -2,6 & 1,4 & 0,8 \\ 1,4 & -0,6 & -0,2 \end{pmatrix} \bullet$$

Задание 4.

Решить систему уравнений методом Крамера, Гаусса и методом обратной матрицы. Сделать проверку.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 4

Вариант		Вариант	
	Система уравнений		Система уравнений

1.	$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x + 3y - 2z = 8. \\ x + y + z = 6 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ x - 2y + z = 9. \\ x - 4y - 2z = 3 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ 5x + 3y - 2z = 2. \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 3x + y + 3z = 2 \\ 5x - 2y + 2z = 1. \\ 2x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 5x + 2y + 5z = 4 \\ 3x + 5y - 3z = -1. \\ -2x - 4y + 3z = 1 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} -4x + y + 3z = 1 \\ 3x - y - 4z = 2. \\ 2x + 3y + z = -3 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 3x + 4y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = -4. \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} -x - 2y - z = 2 \\ 5x + 2y + 4z = 7. \\ x - y + 5z = -3 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x + 3y - z = 3 \\ 4x + 3y - 2z = -2. \\ 2x + 2y - z = 5 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ -x - y + 2z = 6. \\ 2x + y - z = -1 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} -x + 2y - z = 5 \\ -x - 3y - 3z = 4. \\ -2x - 2y - 2z = 3 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = -5. \\ 6x + 2y + z = 2 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 5z = -3. \\ -x + y + 3z = 4 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} 3x + y + z = 9 \\ x - y + 2z = -3. \\ -x + y - z = 6 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 2x + 4y + 2z = -1. \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 5x + y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = -1. \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$

17.	$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x - y + 3z = 5. \\ -x + y - z = 2 \end{cases}$	18.	$\begin{cases} 3x + 3y - 3z = -5 \\ 2x + y + 2z = 9. \\ -x - 2y + z = 6 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} -x + 3y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = -3. \\ 2x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$	20.	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x + 4y + 2z = 1. \\ 3x + 2y - z = -3 \end{cases}$
21.	$\begin{cases} -3x + 2y + z = 9 \\ 2x + 4y + 2z = 1. \\ -x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$	22.	$\begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = 3. \\ -2x + y - z = -1 \end{cases}$
23.	$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 3 \\ x - y + z = 5. \\ -2x + y + 2z = 3 \end{cases}$	24.	$\begin{cases} 5x + y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = -1. \\ -2x + 2y + z = 5 \end{cases}$
25.	$\begin{cases} 2x + 4y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = -3. \\ -2x + 3y - z = 7 \end{cases}$	26.	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 2x - 4y - 2z = 1. \\ -x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$
27.	$\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 5. \\ 2x + 4y + z = -2 \end{cases}$	28.	$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 6 \\ x - y + z = 5. \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$
29.	$\begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ 5x - 4y + z = 5. \\ 3x + 5y + z = -2 \end{cases}$	30.	$\begin{cases} 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 5y + 6z = 1. \\ 2x - 4y - 7z = 4 \end{cases}$

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

1)Метод Крамера. Если $|A| \neq 0$, то систему можно решить по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, – где $\Delta = |A|$, а Δ_k – определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой k -го столбца столбцом свободных членов.

В нашем примере:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 37,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -46, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 24.$$

Тогда по правилу Крамера $x_1 = 7,4$, $x_2 = -9,2$, $x_3 = 4,8$.

Проверка:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,4 - 9,2 + 4,8 = 3;$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 22,2 - 18,4 - 4,8 = -1;$$

$$-2x_1 + x_2 + 5x_3 = -14,8 - 9,2 + 24 = 0.$$

Таким образом, решение найдено верно.

2)Метод обратной матрицы. Систему $A\bar{x} = \bar{b}$, где $|A| \neq 0$, можно решить по формуле: $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$.

В нашем примере $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Как показано в примере к предыдущему заданию,

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 & -4 & -3 \\ -13 & 7 & 4 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } \bar{x} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 & -4 & -3 \\ -13 & 7 & 4 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 33+4+0 \\ -39-7+0 \\ 21+3+0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 37 \\ -46 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,4 \\ -9,2 \\ 4,8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получилось то же решение: $x_1 = 7,4$, $x_2 = -9,2$, $x_3 = 4,8$.

Ответ: $x_1 = 7,4$, $x_2 = -9,2$, $x_3 = 4,8$. •

Задание 5.

Сравнить ранги основной и расширенной матриц системы линейных уравнений, сделать вывод и решить систему методом Гаусса; записать какое-нибудь частное решение и для него сделать проверку.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 5

Вариант	Система уравнений
1.	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14 \end{cases}.$
2.	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}.$

3.	$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 2 \\ 15x_1 + 30x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 = -13 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 9 \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -1 \end{cases}.$
4.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}.$
5.	$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 6 \\ 14x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 7 \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}.$
6.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}.$
7.	$\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 23 \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -8 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 1 \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 12 \end{cases}.$
8.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 13x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 9 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}.$

9.	$\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 8 \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 4 \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}.$
10.	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases}.$
11.	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 9x_5 = -4 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 6 \end{cases}.$
12.	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}.$
13.	$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7 \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}.$
14.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 4x_5 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}.$

15.	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1 \end{cases}$
16.	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 5 \end{cases}$
17.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$
18.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -7 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 10 \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 7 \end{cases}$
20.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}$

21.	$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \end{cases}.$
22.	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 8 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \end{cases}.$
23.	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = -3 \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = -7 \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -6 \end{cases}.$
24.	$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5 \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 15x_5 = 10 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5 = 8 \end{cases}.$
25.	$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 10x_4 + 7x_5 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}.$
26.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = -1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases}.$

27.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + 10x_5 = -7 \end{cases}.$
28.	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ 4x_1 - 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}.$
29.	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}.$
30.	$\begin{cases} 5x_1 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \end{cases}.$

Пример

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}.$$

Запишем расширенную матрицу системы и будем приводить эту матрицу к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -2 , к третьей строке – первую, умноженную на -3 , к четвертой строке – первую, умноженную на -1 :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & -3 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 & -2 \end{array} \right).$$

Поменяем местами вторую и четвертую строки:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & -3 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right).$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на -9 , к четвертой строке – вторую, умноженную на -5 :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 24 & -36 & -12 & 24 \\ 0 & 0 & 12 & -18 & -6 & 12 \end{array} \right).$$

Прибавим к четвертой строке третью, умноженную на $-0,5$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 24 & -36 & -12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Вычеркнем нулевую строку, а третью строку разделим на 12. Получим ступенчатый вид матрицы $\tilde{A}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Таким образом, ранг матрицы $\tilde{A}$ равен 3. Матрица слева от вертикальной черты представляет ступенчатый вид матрицы A ; таким образом, ее ранг также равен 3. Значит, ранги матриц $\tilde{A}$ и A совпадают. Поэтому по теореме Кронекера-Капелли данная система линейных уравнений совместна. Поскольку же ранг системы (3) меньше числа неизвестных (5), то система имеет бесконечно много решений. Чтобы найти их, выпишем преобразованную систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}. \text{ Выразим из последнего урав-}$$

нения x_5 и подставим в предпоследнее уравнение:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2(2x_3 - 3x_4 - 2) = -2, \text{ то есть} \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases}. \text{ Выразим из предпоследнего}$$

уравнения x_2 и подставим в предыдущее уравнение:

$$\begin{cases} x_1 - 2(-x_3 + 2x_4 + 2) + x_3 - x_4 - 2(2x_3 - 3x_4 - 2) = 1 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 + 2 \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases},$$

то есть $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 + 2 \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases}$. Отсюда получаем общее реше-

ние: $\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 + 1 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 + 2 \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases}$, где x_3, x_4 – свободные неизвест-

ные. Заметим, что число свободных неизвестных равно разности между числом неизвестных и рангом системы: $5-3=2$.

Чтобы найти какое-нибудь частное решение, придадим свободным неизвестным какие-нибудь конкретные значения: пусть, например, $x_3 = x_4 = 0$. Тогда $x_1 = 1, x_2 = 2, x_5 = -2$. Подставим эти значения в уравнения системы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 - 4 + 0 + 0 + 4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 + 2 - 0 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 3 + 6 + 0 = 9 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 - 2 + 0 + 0 = -1 \end{cases}.$$

Итак, найденное частное решение удовлетворяет системе.

$$\text{Ответ: общее решение } \begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 + 1 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 + 2, \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases}$$

где x_3, x_4 – свободные неизвестные;

частное решение $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = -2$. •

Тема 6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Задание 1.

Определить, образует ли линейное пространство над полем действительных чисел данное множество M , в котором определены сумма $x \oplus y$ элементов множества M и произведение $\alpha \otimes x$ действительного числа α и элемента x множества M .

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 1

Вариант	Множество M	Сложение	Умножение на число
1.	Трехмерные векторы с целочисленными координатами	$x \oplus y = x + y$	$\alpha \otimes x = \alpha x$
2.	Трехмерные векторы, лежащие на оси Oz	$x \oplus y = x + y$	$\alpha \otimes x = \alpha x$
3.	Двумерные векторы, каждый из которых лежит на оси Ox или на оси Oy	$x \oplus y = x + y$	$\alpha \otimes x = \alpha x$
4.	Все трехмерные векторы	$x \oplus y = x \times y$	$\alpha \otimes x = \alpha x$
5.	Трехмерные векторы, лежащие на оси Oy	$x \oplus y = x + y$	$\alpha \otimes x = \alpha x \mathbf{j}$
6.	Трехмерные векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\mathbf{a}$,	$x \oplus y = x + y$	$\alpha \otimes x = \alpha x$

	<i>b</i> и <i>c</i>		
7.	Функции, принимающие положительные значения	$f(t) \oplus g(t) = f(t) \cdot g(t)$	$\alpha \otimes f(t) = (f(t))^\alpha$
8.	Непрерывные функции, определенные на отрезке $[0;1]$	$f(t) \oplus g(t) = f(t) + g(t)$	$\alpha \otimes f(t) = \alpha \cdot f(t)$
9.	Четные функции, определенные на отрезке $[-1;1]$	$f(t) \oplus g(t) = f(t) \cdot g(t)$	$\alpha \otimes f(t) = \alpha \cdot f(t)$
10.	Нечетные функции, определенные на отрезке $[-1;1]$	$f(t) \oplus g(t) = f(t) + g(t)$	$\alpha \otimes f(t) = \alpha \cdot f(t)$
11.	Функции двух переменных вида $f(x,y) = ax + by$	$f(x,y) \oplus g(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$	$\alpha \otimes f(x,y) = \alpha f(x,y)$
12.	Многочлены третьей степени от переменной x	$P(x) \oplus Q(x) = P(x) + Q(x)$	$\alpha \otimes P(x) = \alpha P(x)$
13.	Многочлены степени не выше третьей от переменной x	$P(x) \oplus Q(x) = P(x) + Q(x)$	$\alpha \otimes P(x) = \alpha P(x)$
14.	Упорядоченные наборы из n чисел: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$	$x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$	$\alpha \otimes x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

15.	Упорядоченные наборы из n чисел: $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$	$x \oplus y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n)$	$\alpha \otimes x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$
16.	Сходящиеся последовательности: $x=(x_n)$, $y=(y_n)$	$x \oplus y = (x_n + y_n)$	$\alpha \otimes x = (\alpha x_n)$
17.	Расходящиеся последовательности: $x=(x_n)$, $y=(y_n)$	$x \oplus y = (x_n + y_n)$	$\alpha \otimes x = (\alpha x_n)$
18.	Многочлены степени не выше второй от переменных x и y	$P(x,y) \oplus Q(x,y) = P(x,y) + Q(x,y)$	$\alpha \otimes P(x,y) = \alpha P(x,y)$
19.	Диагональные матрицы пятого порядка: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$	$A \oplus B = (a_{ij} + b_{ij})$	$\alpha \otimes A = (\alpha a_{ij})$
20.	Невырожденные матрицы пятого порядка: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$	$A \oplus B = AB$	$\alpha \otimes A = (\alpha a_{ij})$
21.	Квадратные матрицы пятого порядка: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$	$A \oplus B = (a_{ij} + b_{ij})$	$\alpha \otimes A = (\alpha a_{ij})$
22.	Диагональные матрицы пятого порядка: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$	$A \oplus B = AB$	$\alpha \otimes A = (\alpha a_{ij})$
23.	Матрицы размером 3×4 : $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$	$A \oplus B = (a_{ij} + b_{ij})$	$\alpha \otimes A = (\alpha a_{ij})$
24.	Симметрические матрицы пятого порядка: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$;	$A \oplus B = (a_{ij} + b_{ij})$	$\alpha \otimes A = (\alpha a_{ij})$

25.	Целые числа	$x \oplus y = x + y$	$\alpha \otimes x = [\alpha x]$ (квадратными скобками обозначена целая часть числа)
26.	Действительные числа	$x \oplus y = x + y$	$\alpha \otimes x = \alpha x$
27.	Положительные действительные числа	$x \oplus y = xy$	$\alpha \otimes x = x^\alpha$
28.	Отрицательные действительные числа	$x \oplus y = - x \cdot y $	$\alpha \otimes x = - x ^\alpha$
29.	Действительные числа	$x \oplus y = xy$	$\alpha \otimes x = \alpha x$
30.	Дифференцируе- мые функции	$f(t) \oplus g(t) = f(t) + g(t)$	$\alpha \otimes f(t) = \alpha f(t)$

Пример

Определим, образует ли линейное пространство над полем действительных чисел множество M всех дифференцируемых функций, если сумма элементов множества M определяется по формуле $f(t) \oplus g(t) = f(t)g(t)$, а произведение действительного числа α и элемента множества M определяется по формуле $\alpha \otimes f(t) = \alpha f(t)$.

1. Для линейного пространства M над полем действительных чисел должны выполняться следующие требования к операции сложения:

если $x \in M$ и $y \in M$, то $x \oplus y \in M$, причем

1.1. $x \oplus y = y \oplus x$ для любых $x, y \in M$;

1.2. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ для любых $x, y, z \in M$;

1.3. существует $O \in M$: $x \oplus O = x$ для любого $x \in M$;

1.4. для любого $x \in M$ существует $-x \in M$: $x \oplus (-x) = O$.

В данном примере $f(t) \oplus g(t) = f(t)g(t)$. Произведение дифференцируемых функций является дифференцируемой функцией. Значит, если $f(t) \in M$ и $g(t) \in M$, то $f(t) \oplus g(t) \in M$. Проверим требования 1.1.–1.4.

Поскольку $f(t)g(t) = g(t)f(t)$, то $f(t) \oplus g(t) = g(t) \oplus f(t)$ для любых $f(t), g(t) \in M$. Значит, требование 1.1. выполнено.

Поскольку $f(t)(g(t)h(t)) = (f(t)g(t))h(t)$, то $f(t) \oplus (g(t) \oplus h(t)) = (f(t) \oplus g(t)) \oplus h(t)$ для любых $f(t), g(t), h(t) \in M$. Значит, требование 1.2. выполнено.

Обозначим через O функцию, тождественно равную 1. Эта функция дифференцируема, то есть $O \in M$. Поскольку $f(t) \cdot 1 = f(t)$, то $f(t) \oplus O = f(t)$ для любого $f(t) \in M$. Значит, требование 1.3. выполнено.

Если $f(t) \in M$, то должно быть $f(t) \oplus (-f(t)) = O$, то есть $f(t)(-f(t)) = 1$. Значит, функция $-f(t)$ – это $(f(t))^{-1}$. Но функция $(f(t))^{-1}$ является дифференцируемой не для любой дифференцируемой функции $f(t)$. Поэтому неверно, что $-f(t) \in M$ для любого $f(t) \in M$. Значит, требование 1.4. не выполнено.

2. Для линейного пространства M над полем действительных чисел должны выполняться следующие требования к операции умножения на число:

если $x \in M$ и $\alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha \otimes x \in M$, причем

2.1. $\alpha \otimes (\beta \otimes x) = (\alpha\beta) \otimes x$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}, x \in M$;

2.2. $(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}, x \in M$;

2.3. $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$ для любых $\alpha \in \mathbf{R}, x, y \in M$;

2.4. $1 \otimes x = x$ для любого $x \in M$.

В данном примере выполнение этих требований можно не проверять, поскольку уже показано, что выполняются не все требования к сложению.

Ответ: нет. •

Задание 2.

Определить, являются ли линейно зависимыми данные векторы.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 2

Вариант	a_1	a_2	a_3	a_4
1.	(3;2;4;7)	(4;-3;11;-2)	(-5;3;-13;1)	(7;-2;16;3)
2.	(1;1;4;2)	(1;1;-2;4)	(0;2;6;-2)	(-3;-1;3;4)
3.	(2;3;5;2)	(1;-2;1;-1)	(-1;2;-1;1)	(1;-3;2;-3)
4.	(1;0;1;0)	(-2;1;3;-7)	(3;-1;0;3)	(4;-3;1;-3)
5.	(1;2;3;1)	(2;3;1;2)	(3;1;2;-2)	(0;4;2;5)
6.	(2;3;4;1)	(-1;1;-1;3)	(3;-5;1;-13)	(3;0;3;-6)
7.	(1;2;3;-4)	(2;-1;2;5)	(2;-1;5;-4)	(2;3;-4;1)
8.	(2;3;4;1)	(3;-1;1;-2)	(-1;2;-3;4)	(5;-7;6;-7)
9.	(1;2;1;1)	(1;1;1;2)	(-3;-2;1;-3)	(-1;1;3;1)
10.	(1;2;3;4)	(2;3;4;1)	(3;4;1;2)	(7;11;11;11)
11.	(-1;-1;0;2)	(1;0;-1;-2)	(-1;-3;1;5)	(1;2;-3;-6)
12.	(2;1;1;2)	(1;3;1;3)	(1;1;5;3)	(2;5;-7;14)
13.	(-5;3;-13;1)	(7;-2;16;3)	(3;2;4;7)	(4;-3;11;-2)
14.	(0;2;6;-2)	(-3;-1;3;4)	(1;1;4;2)	(1;1;-2;4)
15.	(-1;2;-1;1)	(1;-3;2;-3)	(2;3;5;2)	(1;-2;1;-1)
16.	(3;-1;0;3)	(4;-3;1;-3)	(1;0;1;0)	(-2;1;3;-7)
17.	(3;1;2;-2)	(0;4;2;5)	(1;2;3;1)	(2;3;1;2)
18.	(2;-1;5;-4)	(2;3;-4;1)	(1;2;3;-4)	(2;-1;2;5)
19.	(-1;2;-3;4)	(5;-7;6;-7)	(2;3;4;1)	(3;-1;1;-2)
20.	(-3;-2;1;-3)	(-1;1;3;1)	(1;2;1;1)	(1;1;1;2)
21.	(3;4;1;2)	(7;11;11;11)	(1;2;3;4)	(2;3;4;1)
22.	(-1;-3;1;5)	(1;2;-3;-6)	(-1;-1;0;2)	(1;0;-1;-2)
23.	(1;1;5;3)	(2;5;-7;14)	(2;1;1;2)	(1;3;1;3)
24.	(3;-5;1;-13)	(3;0;3;-6)	(2;3;4;1)	(-1;1;-1;3)
25.	(7;-2;16;3)	(4;-3;11;-2)	(-5;3;-13;1)	(3;2;4;7)
26.	(-3;-1;3;4)	(1;1;-2;4)	(0;2;6;-2)	(1;1;4;2)
27.	(1;-3;2;-3)	(1;-2;1;-1)	(-1;2;-1;1)	(2;3;5;2)
28.	(4;-3;1;-3)	(-2;1;3;-7)	(3;-1;0;3)	(1;0;1;0)
29.	(0;4;2;5)	(2;3;1;2)	(3;1;2;-2)	(1;2;3;1)
30.	(3;0;3;-6)	(-1;1;-1;3)	(3;-5;1;-13)	(2;3;4;1)

Пример

Определим, являются ли линейно зависимыми векторы $a_1=(1;2;-3;3;1)$, $a_2=(2;-1;1;1;1)$, $a_3=(-3;4;-5;1;-1)$, $a_4=(5;0;-1;5;3)$. Для этого достаточно определить ранг матрицы, строками которой являются эти векторы: если ранг меньше числа векторов, то они линейно зависимы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -5 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A к ступенчатому виду.

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -2 , к третьей – первую, умноженную на 3 , к четвертой – первую, умноженную на -5 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & 10 & -14 & 10 & 2 \\ 0 & -10 & 14 & -10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на 2 , а к четвертой – вторую, умноженную на -2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычеркиваем нулевые строки и получаем ступенчатую матрицу из двух строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $r(A)=2$. Таким образом, ранг матрицы меньше числа векторов.

Ответ: векторы линейно зависимы. •

Задание 3.

Найти базис и размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 3

1. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 8x_4 - 17x_5 = 0. \end{cases}$	2. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 + 8x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 17x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 8x_3 - 11x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 18x_5 = 0. \end{cases}$	4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 10x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 15x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 12x_5 = 0. \end{cases}$	6. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 - 16x_5 = 0. \end{cases}$	8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + x_4 - 12x_5 = 0. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 15x_4 + 10x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 6x_4 - 9x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$	10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 8x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 8x_5 = 0. \end{cases}$
11. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 - 18x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 - 10x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$	12. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
13. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 14x_4 + 14x_5 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 6x_3 + 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$	14. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 14x_3 + 18x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 12x_5 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 8x_3 - 11x_4 + 3x_5 = 0, \\ -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 9x_4 + 21x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 13x_3 - 7x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$	16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$
17. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 10x_5 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 6x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$	18. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 8x_5 = 0. \end{cases}$
19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 14x_4 + 13x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$	20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 10x_5 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$
21. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 15x_4 + 10x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 - 17x_4 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 19x_5 = 0. \end{cases}$	22. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 10x_4 + 13x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$
23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 - 18x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 12x_4 - 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 11x_3 - 21x_5 = 0. \end{cases}$	24. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_3 - 10x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$
25. $\begin{cases} -4x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 23x_5 = 0, \\ -2x_1 - 6x_2 + 14x_4 - 14x_5 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 8x_4 - 17x_5 = 0. \end{cases}$	26. $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 14x_4 - 8x_5 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 14x_3 - 18x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 17x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$
27. $\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 2x_4 + 18x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - 21x_5 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 18x_5 = 0. \end{cases}$	28. $\begin{cases} 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 15x_5 = 0, \\ -x_1 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
29. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 12x_5 = 0. \end{cases}$	30. $\begin{cases} -3x_1 + 6x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

Пример

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}.$$

Найдем общее решение системы методом Гаусса. Столбец свободных членов при этом можно не писать: нули так и останутся нулями при всех элементарных преобразованиях.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & -2 & 7 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & -7 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 26 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_5 = 0 \\ 13x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$. Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 5x_2 - x_5 \\ x_4 = 13x_2 + 2x_3 + x_5 \end{cases}, x_2, x_3, x_5 - \text{свободные неизвестные.}$$

Базис пространства решений системы – это фундаментальный набор решений. Для его нахождения составим таблицу, имеющую пять столбцов (столько, сколько неизвестных) и три строки (столько, сколько свободных неизвестных). В первой строке $x_2=1, x_3=x_5=0$; во второй строке $x_3=1, x_2=x_5=0$; в третьей строке $x_5=1, x_2=x_3=0$; x_1 и x_4 находим по формулам общего решения.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\bar{f}_1$	5	1	0	13	0
$\bar{f}_2$	0	0	1	2	0
$\bar{f}_3$	-1	0	0	1	1

Итак, $\bar{f}_1 = (5, 1, 0, 13, 0)$, $\bar{f}_2 = (0, 0, 1, 2, 0)$, $\bar{f}_3 = (-1, 0, 0, 1, 1)$ – фундаментальный набор решений. Всякое решение системы является линейной комбинацией $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ и $\bar{f}_3$:

$$\bar{x} = (5x_2 - x_5; x_2; x_3; 13x_2 + 2x_3 + x_5; x_5) = x_2 \bar{f}_1 + x_3 \bar{f}_2 + x_5 \bar{f}_3.$$

Ответ: $\bar{f}_1 = (5, 1, 0, 13, 0)$, $\bar{f}_2 = (0, 0, 1, 2, 0)$, $\bar{f}_3 = (-1, 0, 0, 1, 1)$.•

Задание 4.

Найти координаты вектора x базисе g_1, g_2, g_3 , если он задан в базисе e_1, e_2, e_3 .

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 4

Вариант	g_1	g_2	g_3	x
1.	$e_1 + e_2 + 2e_3$	$2e_1 - e_2$	$e_1 + e_2 + e_3$	$(6, -1, 3)$
2.	$e_1 + e_2 + 3e_3$	$1,5e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(1, 2, 4)$
3.	$e_1 + e_2 + 4e_3$	$\frac{4}{3}e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(1, 3, 6)$
4.	$e_1 + e_2 + 1,5e_3$	$3e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(2, 4, 1)$
5.	$e_1 + e_2 + \frac{4}{3}e_3$	$4e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(6, 3, 1)$
6.	$e_1 + e_2 + 5e_3$	$1,25e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(1, 4, 8)$
7.	$e_1 + e_2 + 1,25e_3$	$5e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(8, 4, 1)$
8.	$e_1 + e_2 + 6e_3$	$1,2e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(2, 5, 10)$
9.	$e_1 + e_2 + 1,2e_3$	$6e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(10, 5, 1)$
10.	$e_1 + e_2 + 7e_3$	$\frac{7}{6}e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(1, 6, 12)$
11.	$e_1 + e_2 + \frac{7}{6}e_3$	$7e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(-12, 6, 1)$
12.	$e_1 + e_2 + 8e_3$	$\frac{8}{7}e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(-1, 7, 14)$
13.	$e_1 + e_2 - e_3$	$0,5e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(-3, 2, 4)$
14.	$e_1 + e_2 + 0,5e_3$	$-e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(2, 4, 3)$
15.	$e_1 + e_2 - 2e_3$	$\frac{2}{3}e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(2, 6, -3)$
16.	$e_1 + e_2 + \frac{2}{3}e_3$	$-2e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(12, 3, -1)$
17.	$e_1 + e_2 - 3e_3$	$0,75e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(1, -4, 8)$
18.	$e_1 + e_2 - 3e_3$	$0,75e_1 - e_2$	$-e_1 + e_2 + e_3$	$(1, 4, -8)$

19.	$e_1+e_2-4e_3$	$0,8e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(7,-5,10)$
20.	$e_1+e_2+0,8e_3$	$-4e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(5,-5,-4)$
21.	$e_1+e_2-5e_3$	$\frac{5}{6}e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(1,-6,6)$
22.	$e_1+e_2+\frac{5}{6}e_3$	$-5e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(6,6,2)$
23.	$e_1+e_2-6e_3$	$\frac{6}{7}e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(1,7,-7)$
24.	$e_1+e_2+\frac{6}{7}e_3$	$-6e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(7,7,2)$
25.	$e_1+e_2-7e_3$	$\frac{7}{8}e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(3,-8,8)$
26.	$e_1+e_2-8e_3$	$\frac{8}{9}e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(1,-9,9)$
27.	$e_1+e_2+\frac{8}{9}e_3$	$-8e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(9,9,2)$
28.	$e_1+e_2-9e_3$	$0,9e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(3,-10,10)$
29.	$e_1+e_2+0,9e_3$	$-9e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(10,10,7)$
30.	$e_1+e_2+10e_3$	$\frac{10}{9}e_1-e_2$	$-e_1+e_2+e_3$	$(1,9,18)$

Пример

$g_1=e_1+e_2+11e_3$, $g_2=1,1e_1-e_2$, $g_3=-e_1+e_2+e_3$, $x=(1,10,10)$.

Сначала запишем матрицу перехода T от базиса e_1, e_2, e_3 к базису g_1, g_2, g_3 . Столбцы матрицы T – это координаты векторов нового базиса в старом базисе. Значит,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1,1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора x в новом базисе определяются

по формуле: $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Найдём обратную матрицу T^{-1} :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1,1 & -0,1 \\ -10 & -12 & 2 \\ -11 & -12,1 & 2,1 \end{pmatrix}.$$

Тогда координаты вектора x в новом базисе:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1,1 & -0,1 \\ -10 & -12 & 2 \\ -11 & -12,1 & 2,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -110 \\ -111 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (11, -110, -111). •

Задание 5.

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Определить, являются ли линейными следующие преобразования пространства $\mathbf{R}^3$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 5

Вариант	Формулы преобразований
1.	$f(\bar{x}) = (2x_1 + x_2, 3x_2 - 4x_3, x_1 - 2x_2 + x_3);$ $g(\bar{x}) = (3x_1 - x_2 + x_3, x_2^2, 2x_1 + x_3);$ $h(\bar{x}) = (x_1 - 3, 5 - x_2 + x_3, 2x_2).$
2.	$f(\bar{x}) = (5x_1 + 3x_2 - x_3, x_2, x_1 - x_3);$ $g(\bar{x}) = (5x_1 + 3x_2 - 1, x_3, x_1 - x_3);$ $h(\bar{x}) = (5x_1^2 + 3x_2 - x_3, x_2, x_1 - x_3).$
3.	$f(\bar{x}) = (x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 + 3x_3, x_3);$ $g(\bar{x}) = (x_2^2 - x_3, 2x_1 + x_2, x_3 - x_2);$ $h(\bar{x}) = (x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, x_3 + 1).$
4.	$f(\bar{x}) = (x_1, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3);$ $g(\bar{x}) = (x_1, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 1);$ $h(\bar{x}) = (x_1, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3^2).$

5.	$f(\bar{x}) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3 + 1);$ $g(\bar{x}) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_2^2 + x_3);$ $h(\bar{x}) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3).$
6.	$f(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2, 2x_2 + 3x_3);$ $g(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2, 2x_2 + 3);$ $h(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2, 2x_2 + 3x_3^2).$
7.	$f(\bar{x}) = (5x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_2 - 3x_3, x_3);$ $g(\bar{x}) = (5x_1 + 3x_2 + x_3^2, 2x_2 - 3x_3, x_3);$ $h(\bar{x}) = (5x_1 + 3x_2 + 1, 2x_2 - 3x_3, x_3).$
8.	$f(\bar{x}) = (0, x_1 - 2x_2 + 3x_3, 4x_1 - 5x_2 + 6x_3);$ $g(\bar{x}) = (0, x_1^2 - 2x_2 + 3x_3, 4x_1 - 5x_2 + 6x_3);$ $h(\bar{x}) = (0, x_1 - 2x_2 + 3x_3, 4x_1 - 5x_2 + 6).$
9.	$f(\bar{x}) = (2x_1 - x_2, x_2^2, x_1 - 2x_2 + x_3);$ $g(\bar{x}) = (2x_1 - x_2, x_2, x_1 - 2x_2 + x_3);$ $h(\bar{x}) = (2x_1 - 2, x_2, x_1 - 2x_2 + x_3).$
10.	$f(\bar{x}) = (x_2, x_3 - x_1, x_2 + x_3 + 1);$ $g(\bar{x}) = (x_2, x_3 - x_1^2, x_2 + x_3);$ $h(\bar{x}) = (x_2, x_3 - x_1, x_2 + x_3).$
11.	$f(\bar{x}) = (x_2 - x_3, 1 - x_1, x_1 + 2x_2 - x_3);$ $g(\bar{x}) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3, 2x_1 - x_2 + x_3);$ $h(\bar{x}) = (x_1^2 + x_2, x_1 - x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$
12.	$f(\bar{x}) = (x_2 - 4x_3, x_1 - 5x_3, x_3);$ $g(\bar{x}) = (x_2 - 4x_3, x_1^2 - 5x_3, x_3);$ $h(\bar{x}) = (x_2 - 4x_3, x_1 + 2, x_1 + 2x_2).$
13.	$f(\bar{x}) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3);$ $g(\bar{x}) = (x_1^2, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3);$ $h(\bar{x}) = (x_1, x_1 + 2, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$
14.	$f(\bar{x}) = (x_1 - 2x_2 + 1, x_2, x_2 - 3x_3);$ $g(\bar{x}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, x_2, x_2 - 3x_3);$ $h(\bar{x}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, x_2^2, x_2 - 3x_3).$

15.	$f(\bar{x}) = (3x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2, x_3);$ $g(\bar{x}) = (3x_1 + 2x_2, x_1 - 2, x_3);$ $h(\bar{x}) = (3x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2^2, x_3).$
16.	$f(\bar{x}) = (4x_1 + 3x_2 + 2x_3, 3x_2 + 2x_3, x_3);$ $g(\bar{x}) = (4x_1 + 3x_2 + 2, 3x_2 + 2x_3, x_3);$ $h(\bar{x}) = (4x_1 + 3x_2 + 2x_3, 3x_2 + 2x_3, x_3^2).$
17.	$f(\bar{x}) = (3x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_2 + 2x_3, 3x_3);$ $g(\bar{x}) = (3x_1 + 2x_2, 3x_2 + 2, 3x_3);$ $h(\bar{x}) = (3x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_2 + 2x_3, x_3^2).$
18.	$f(\bar{x}) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 4x_2, x_3);$ $g(\bar{x}) = (x_1 - x_2^2, 2x_1 + 4x_2, x_3);$ $h(\bar{x}) = (x_1 - 2, 2x_1 + 4x_2, x_3).$
19.	$f(\bar{x}) = (4x_1 - 3x_2^2, 3x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_3);$ $g(\bar{x}) = (4x_1 - 3, 3x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_3);$ $h(\bar{x}) = (4x_1 - 3x_2, 3x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_3).$
20.	$f(\bar{x}) = (x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_3);$ $g(\bar{x}) = (x_1 - x_2 + 1, 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_3);$ $h(\bar{x}) = (x_1 - x_2, 2x_2 - x_3^2, 3x_1).$
21.	$f(\bar{x}) = (2x_1 + x_2 - 2x_3, x_2 - 2x_3, 2x_3);$ $g(\bar{x}) = (2x_1 + x_2 - 2x_3, x_2^2 - 2x_3, 2x_3);$ $h(\bar{x}) = (2x_1 + x_2 - 2, x_2 - 2x_3, 2x_3).$
22.	$f(\bar{x}) = (7x_2 - 3x_3, x_1 + 5x_2 + 1, x_3);$ $g(\bar{x}) = (7x_2 - 3x_3, x_1 + 5x_2, x_3^2);$ $h(\bar{x}) = (7x_2 - 3x_3, x_1 + 5x_2, x_3).$
23.	$f(\bar{x}) = (3x_1 + 2x_2, x_2, 0);$ $g(\bar{x}) = (3x_1 + 2x_2, 1, 0);$ $h(\bar{x}) = (3x_1 + 2x_2, x_2^2, 0).$
24.	$f(\bar{x}) = (5x_2 + x_3, x_2, x_1 - 3x_2);$ $g(\bar{x}) = (5x_2 + x_3, x_2, x_1^2 - 3x_2);$ $h(\bar{x}) = (5x_2 + x_3, x_2, x_1 - 3).$

25.	$f(\bar{x}) = (x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_3);$ $g(\bar{x}) = (x_1 - x_2, x_1 - 3, x_2 - x_3);$ $h(\bar{x}) = (x_1^2 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_3).$
26.	$f(\bar{x}) = (x_2 - 3x_3, x_1 - 2x_2, x_3 - x_1);$ $g(\bar{x}) = (x_2^2 - 3x_3, x_1 - 2x_2, x_3 - x_1);$ $h(\bar{x}) = (x_2 - 3x_3, 1 - 2x_2, x_3 - x_1).$
27.	$f(\bar{x}) = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 3x_1 + 4x_2, 2x_1 + x_3);$ $g(\bar{x}) = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, 3 + 4x_2, 2x_1 + x_3);$ $h(\bar{x}) = (2x_1^2 + 3x_2 + 4x_3, 3x_1 + 4x_2, 2x_1 + x_3).$
28.	$f(\bar{x}) = (4x_1^2 - 5x_2, 3x_1 - 4x_2, 2x_1 - 3x_2);$ $g(\bar{x}) = (4x_1 - 5x_2, 3x_1 - 4x_2, 2x_1 - 3x_2);$ $h(\bar{x}) = (4x_1 - 5x_2, 3x_1 - 4, 2x_1 - 3x_2).$
29.	$f(\bar{x}) = (3x_1 - x_2, 5x_1 + x_2 - x_3, x_2^2);$ $g(\bar{x}) = (3x_1 - 2, 5x_1 + x_2 - x_3, x_3);$ $h(\bar{x}) = (3x_1 - x_2, 5x_1 + x_2 - x_3, x_3).$
30.	$f(\bar{x}) = (x_1^2, x_1 + 2x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3);$ $g(\bar{x}) = (x_1, x_1 + 2x_2, x_1 + 2x_2 + 3x_3);$ $h(\bar{x}) = (x_1, x_1 + 2, x_1 + 2x_2 + 3x_3).$

Пример

$$f(\bar{x}) = (x_1, x_2 + x_3, 1 + x_2 + x_3);$$

$$g(\bar{x}) = (2x_3 - x_1, 0, 3x_1 + 2x_2 - x_3);$$

$$h(\bar{x}) = (0, 4x_2 - x_3 - 5x_1, x_1 - 2x_3^2).$$

Чтобы убедиться, что данное преобразование f является линейным, надо проверить, что для любых векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ и любых чисел α и β выполняется равенство: $f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$.

Проверим это требование для преобразования f .

$$f(\bar{x}) = (x_1, x_2 + x_3, 1 + x_2 + x_3),$$

$$f(\bar{y}) = (y_1, y_2 + y_3, 1 + y_2 + y_3),$$

$$\alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) =$$

$$(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha(x_2 + x_3) + \beta(y_2 + y_3), \alpha(1 + x_2 + x_3) + \beta(1 + y_2 + y_3)).$$

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3),$$

$$f(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) =$$

$$(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3, 1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3).$$

Таким образом, у векторов $\alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$ и $f(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y})$ совпадают первые и вторые координаты. Сравним их третьи координаты:

$\alpha(1 + x_2 + x_3) + \beta(1 + y_2 + y_3)$ и $1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3$. Эти числа совпадают только в том случае, когда $\alpha + \beta = 1$, то есть не всегда. Значит, равенство $f(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$ выполняется не при всех $\bar{x}, \bar{y}, \alpha$ и β . Поэтому **преобразование f не является линейным.**

Проверим то же требование для преобразования g .

$$g(\bar{x}) = (2x_3 - x_1, 0, 3x_1 + 2x_2 - x_3),$$

$$g(\bar{y}) = (2y_3 - y_1, 0, 3y_1 + 2y_2 - y_3),$$

$$\alpha g(\bar{x}) + \beta g(\bar{y}) =$$

$$(\alpha(2x_3 - x_1) + \beta(2y_3 - y_1), 0, \alpha(3x_1 + 2x_2 - x_3) + \beta(3y_1 + 2y_2 - y_3)).$$

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3),$$

$$g(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) =$$

$$(2\alpha x_3 + 2\beta y_3 - \alpha x_1 - \beta y_1, 0, 3\alpha x_1 + 3\beta y_1 + 2\alpha x_2 + 2\beta y_2 - \alpha x_3 - \beta y_3).$$

Таким образом, у векторов $\alpha g(\bar{x}) + \beta g(\bar{y})$ и $g(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y})$ совпадают все координаты, то есть эти векторы равны. Значит, равенство $g(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha g(\bar{x}) + \beta g(\bar{y})$ выполняется при всех $\bar{x}, \bar{y}, \alpha$ и β . Поэтому **преобразование g является линейным.**

Проверим это требование для преобразования h .

$$\begin{aligned}
h(\bar{x}) &= (0, 4x_2 - x_3 - 5x_1, x_1 - 2x_3^2), \\
h(\bar{y}) &= (0, 4y_2 - y_3 - 5y_1, y_1 - 2y_3^2), \\
\alpha h(\bar{x}) + \beta h(\bar{y}) &= \\
(0, \alpha(4x_2 - x_3 - 5x_1) + \beta(4y_2 - y_3 - 5y_1), \alpha(x_1 - 2x_3^2) + \beta(y_1 - 2y_3^2)). \\
\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} &= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3), \\
h(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) &= \\
(0, 4\alpha x_2 + 4\beta y_2 - \alpha x_3 - \beta y_3 - 5\alpha x_1 - 5\beta y_1, \alpha x_1 + \beta y_1 - 2(\alpha x_3 + \beta y_3)^2).
\end{aligned}$$

Таким образом, у векторов $\alpha h(\bar{x}) + \beta h(\bar{y})$ и $h(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y})$ совпадают первые и вторые координаты. Сравним их третьи координаты:

$\alpha(x_1 - 2x_3^2) + \beta(y_1 - 2y_3^2) = \alpha x_1 - 2\alpha x_3^2 + \beta y_1 - 2\beta y_3^2$ и
 $\alpha x_1 + \beta y_1 - 2(\alpha x_3 + \beta y_3)^2 = \alpha x_1 + \beta y_1 - 2\alpha^2 x_3^2 - 4\alpha\beta x_3 y_3 - 2\beta^2 y_3^2$.
 Эти числа совпадают только в том случае, когда $\alpha x_3^2 + \beta y_3^2 = \alpha^2 x_3^2 + 2\alpha\beta x_3 y_3 + \beta^2 y_3^2$, то есть не всегда. Значит, равенство $h(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha h(\bar{x}) + \beta h(\bar{y})$ выполняется не при всех $\bar{x}, \bar{y}$, α и β . Поэтому **преобразование h не является линейным.**

Ответ: линейным является преобразование g ; преобразования f и h линейными не являются. •

Задание 6.

Пусть $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$, $A\mathbf{x}=(x_2-x_3, x_1, x_1+x_3)$, $B\mathbf{x}=(x_2, 2x_3, x_1)$. Найдите $f(\mathbf{x})$ для данного линейного оператора f .

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 6

Вариант	f	Вариант	f	Вариант	f
1.	AB	2.	A^2	3.	A^2-B
4.	B^4	5.	$2A+3B^2$	6.	A^2+B^2

7.	$(A-B)^2$	8.	BA	9.	$2(B+2A^2+B^2)$
10.	$B(A-B)$	11.	B^2+A	12.	$B-2A^2$
13.	$3A^2+B$	14.	A^2+B	15.	A^2-B^2
16.	$2B-A^2$	17.	$B(2A-B)$	18.	$A(B+A)$
19.	AB^2	20.	$A(B-A)$	21.	$2(AB+2A)$
22.	$B-A+B^2$	23.	B^3	24.	B^2
25.	$A+BA-B$	26.	B^2-2A	27.	BA^2
28.	$B(A+B)$	29.	$A(2B-A)$	30.	$3B+2A^2$

Пример

$f=B(2A+B)$. Сначала запишем матрицы операторов A и B в том базисе, в котором задан вектор x . Для этого найдем $Ae_1, Ae_2, Ae_3, Be_1, Be_2, Be_3$, где e_1, e_2, e_3 – этот базис. Имеем: $Ae_1=(0,1,1)$, $Ae_2=(1,0,0)$, $Ae_3=(-1,0,1)$; $Be_1=(0,0,1)$, $Be_2=(1,0,0)$, $Be_3=(0,2,0)$. Значит,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу оператора f :

$$\begin{aligned} M_f=B(2A+B) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 & 2 \cdot 1 + 1 & 2 \cdot (-1) + 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 & 2 \cdot 0 + 0 & 2 \cdot 0 + 2 \\ 2 \cdot 1 + 1 & 2 \cdot 0 + 0 & 2 \cdot 1 + 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } f(x)=M_f x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_3 \\ 6x_1 + 4x_3 \\ 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $f(x)=(2x_1+2x_3, 6x_1+4x_3, 3x_2-2x_3)$. •

Задание 7.

Доказать, что преобразование f пространства $\mathbf{R}^3$ является линейным и найти его матрицу в том же базисе, в котором заданы координаты векторов $\bar{x}=(x_1, x_2, x_3)$ и $f(\bar{x})$.
Найти ранг и дефект преобразования.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 12

Вариант	Формула преобразования
1.	$f(\bar{x}) = (x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_1 + x_3)$
2.	$f(\bar{x}) = (x_1 + x_2 + x_3, x_3, x_1 - x_2)$
3.	$f(\bar{x}) = (2x_1 + x_2, 2x_2 + x_3, 2x_3)$
4.	$f(\bar{x}) = (4x_1 - x_3, x_3 - x_2, x_1 + x_2)$
5.	$f(\bar{x}) = (x_1 - 2x_2 + x_3, x_3, x_1 + x_2)$
6.	$f(\bar{x}) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2, x_2)$
7.	$f(\bar{x}) = (x_1 - 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2)$
8.	$f(\bar{x}) = (2x_1 - x_3, x_2 + 2x_3, x_2 - x_3)$
9.	$f(\bar{x}) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + x_2)$
10.	$f(\bar{x}) = (-x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3)$
11.	$f(\bar{x}) = (x_2, 3x_1 + x_2 - x_3, x_2 + x_3)$
12.	$f(\bar{x}) = (4x_1 + x_2, 4x_2 + x_3, 4x_1 + x_3)$
13.	$f(\bar{x}) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2 + 3x_3, x_3)$
14.	$f(\bar{x}) = (x_1 + 3x_2, x_2 + 3x_3, -2x_2)$
15.	$f(\bar{x}) = (x_1 + x_3, 4x_1 + x_2, 3x_1)$
16.	$f(\bar{x}) = (2x_1 - x_2, 3x_3, 2x_1 + x_2 + x_3)$
17.	$f(\bar{x}) = (3x_1 - x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3)$
18.	$f(\bar{x}) = (2x_2 + x_3, x_3, x_1 - 2x_3)$
19.	$f(\bar{x}) = (x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 + x_3, x_2 - 3x_3)$
20.	$f(\bar{x}) = (2x_1 - x_3, x_2 + 5x_3, x_2)$
21.	$f(\bar{x}) = (x_1 + 5x_2, x_2 - 2x_3, x_1 + 4x_3)$

22.	$f(\bar{x}) = (x_1 + 4x_3, 2x_1 + x_2, x_3)$
23.	$f(\bar{x}) = (7x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_2 + 7x_3)$
24.	$f(\bar{x}) = (x_1 - 3x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$
25.	$f(\bar{x}) = (3x_1 - 4x_2, x_1 + 3x_2, x_2 - 7x_3)$
26.	$f(\bar{x}) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_3, x_2 + x_3)$
27.	$f(\bar{x}) = (-x_1 + 5x_2, x_2 - 5x_3, x_3)$
28.	$f(\bar{x}) = (x_3, x_1 + 3x_2 + 5x_3, x_2 - x_3)$
29.	$f(\bar{x}) = (3x_1 - x_3, 3x_2 - 5x_3, x_2 + 7x_3)$
30.	$f(\bar{x}) = (x_1 - x_3, x_2 - 4x_3, x_2)$

Пример

$$f(\bar{x}) = (3x_1 - x_2 + 5x_3, 0, 2x_2 - x_3)$$

1) Чтобы убедиться, что преобразование f является линейным, надо проверить, что для любых векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ и любых чисел α и β выполняется равенство: $f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$.

Проверим это требование.

$$f(\bar{x}) = (3x_1 - x_2 + 5x_3, 0, 2x_2 - x_3), f(\bar{y}) = (3y_1 - y_2 + 5y_3, 0, 2y_2 - y_3),$$

$$\alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) =$$

$$(\alpha(3x_1 - x_2 + 5x_3) + \beta(3y_1 - y_2 + 5y_3), 0, \alpha(2x_2 - x_3) + \beta(2y_2 - y_3)).$$

$$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3),$$

$$f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) =$$

$$(3\alpha x_1 + 3\beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2 + 5\alpha x_3 + 5\beta y_3, 0, 2\alpha x_2 + 2\beta y_2 - \alpha x_3 - \beta y_3).$$

Таким образом, у векторов $\alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$ и $f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y})$ совпадают все координаты. Значит, равенство $f(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y})$ выполняется при всех $\bar{x}, \bar{y}, \alpha$ и β . Поэтому преобразование f является линейным.

2) Чтобы записать матрицу преобразования f , нужно найти $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$ и $f(\bar{e}_3)$, где $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$ – базисные векторы.

Из формулы $f(\bar{x}) = (3x_1 - x_2 + 5x_3, 0, 2x_2 - x_3)$ получаем:
 $f(\bar{e}_1) = (3 - 0 + 0, 0 - 0) = (3, 0, 0)$, $f(\bar{e}_2) = (0 - 1 + 0, 0, 2 - 0) = (-1, 0, 2)$,
 $f(\bar{e}_3) = (0 - 0 + 5, 0, 0 - 1) = (5, 0, -1)$.

Теперь записываем матрицу преобразования – ее столбцами являются координаты векторов $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$ и $f(\bar{e}_3)$:

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг преобразования f – это ранг матрицы A_f . Если вычеркнуть из этой матрицы нулевую строку, получится ступенчатая матрица $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, имеющая 2 строки.

Значит, ранг преобразования f равен 2.

Чтобы найти дефект преобразования f , воспользуемся тем, что сумма ранга и дефекта преобразования пространства $\mathbf{R}^3$ равна 3. А поскольку ранг равен 2, то дефект равен 1.

Ответ: $A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, ранг f равен 2, дефект f равен 1. •

Задание 8.

Матрица линейного преобразования f пространства $\mathbf{R}^3$ задана в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Найти его матрицу в базисе $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$, если $\bar{g}_1 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{g}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\bar{g}_3 = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_3$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 8

Вариант	A_f	Вариант	A_f	Вариант	A_f
1.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -7 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	3.	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	5.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	9.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	11.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	15.	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
16.	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	17.	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	18.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
19.	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	20.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	21.	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

22.	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	23.	$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	24.	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
25.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	26.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	27.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
28.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	29.	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	30.	$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Пример

$A_f = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Найти матрицу

линейного преобразования f в базисе $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$, если

$$\bar{g}_1 = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \quad \bar{g}_2 = 3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \quad \bar{g}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3.$$

Матрица линейного преобразования f в базисе $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ имеет вид $T^{-1}A_fT$, где T – матрица перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ к базису $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$. Столбцами матрицы перехода являются координаты векторов $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ в базисе

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Поэтому $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем матрицу T^{-1} .

$$|T| = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - (1 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2) = 25 - 26 = -1.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\text{Итак, } T^{-1} = -\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Отсюда } T^{-1}A_fT =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 9.

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 9

Ва- ри- ант	A	Ва- ри- ант	A	Ва- ри- ант	A
1.	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	3.	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	5.	$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7.	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	9.	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	11.	$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	15.	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
16.	$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	17.	$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	18.	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
19.	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 8 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	20.	$\begin{pmatrix} 8 & -7 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	21.	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
22.	$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	23.	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	24.	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
25.	$\begin{pmatrix} 8 & -5 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	26.	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$	27.	$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$
28.	$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	29.	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	30.	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Чтобы найти собственные значения, нужно}$$

составить и решить характеристическое уравнение матрицы A : $|A - \lambda E| = 0$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) - 1(-\lambda - 1) + 1(1 + \lambda) =$$

$= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) + (\lambda + 1) + (\lambda + 1) = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 1 + 1) =$
 $= (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$. Получаем характеристическое уравнение:
 $(\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$. Его корни $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$ являются собственными значениями матрицы. Найдём для каждого из них собственные векторы.

$$1) \text{ Пусть } \lambda = -1. \text{ Тогда } A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и собственные}$$

векторы – ненулевые решения системы $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$. Эта система равносильна одному уравнению $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, то есть $x_3 = -x_1 - x_2$. Тогда общее решение системы можно записать в виде: $\bar{x} = (\alpha, \beta, -\alpha - \beta)$; если $\bar{x} \neq \bar{0}$, то α и β не могут быть одновременно равны нулю. Значит, собственные векторы, соответствующие собственному значению -1 , имеют вид: $\bar{x} = (\alpha, \beta, -\alpha - \beta)$, где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Иначе можно записать так: $\bar{x} = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1)$, где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

$$2) \text{ Пусть } \lambda = 2. \text{ Тогда } A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{ система}$$

$$(A-\lambda E) \bar{x} = \bar{0} \text{ имеет вид } \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} . \text{ Решаем систе-}$$

$$\text{му методом Гаусса: } \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Получаем равносильную систему } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Общее решение системы: $\bar{x} = (\alpha, \alpha, \alpha)$. Значит, собственные векторы, соответствующие собственному значению 2, имеют вид: $\bar{x} = (\alpha, \alpha, \alpha)$, где $\alpha \neq 0$. Иначе можно записать так: $\bar{x} = \alpha(1, 1, 1)$, где $\alpha \neq 0$.

Ответ: собственные значения -1 (собственные векторы $\bar{x} = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1)$, где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$) и 2 ($\bar{x} = \alpha(1, 1, 1)$, где $\alpha \neq 0$). •

Задание 10.

Найти ортогональный базис линейной оболочки векторов a_1, a_2 и a_3 .

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 10

Вариант	a_1	a_2	a_3
1.	(1;0;1)	(1;1;0)	(1;0;-1)
2.	(-2;1;2)	(0;-2;-1)	(2;1;-2)
3.	(-1;1;1)	(-1;-1;1)	(-1;-1;-1)
4.	(1;-1;1)	(1;1;-1)	(1;1;1)
5.	(-2;0;2)	(1;-2;1)	(2;-1;-2)

6.	(1;1;1)	(-1;1;1)	(1;-1;1)
7.	(1;1;1)	(1;1;2)	(1;2;3)
8.	(1;3;1)	(0;3;0)	(3;0;-3)
9.	(2;3;4)	(1;-2;1)	(1;2;3)
10.	(2;1;2)	(-1;2;1)	(2;-1;2)
11.	(2;-1;2)	(1;2;-1)	(2;1;2)
12.	(2;5;1)	(4;-2;2)	(4;1;3)
13.	(1;0;1)	(0;0;2)	(0;-1;1)
14.	(-2;1;2)	(-4;0;4)	(-2;3;3)
15.	(-1;1;1)	(0;2;2)	(0;2;0)
16.	(1;-1;1)	(0;-2;0)	(0;-2;2)
17.	(-2;0;2)	(-4;1;4)	(-3;2;1)
18.	(1;1;1)	(0;2;0)	(2;0;0)
19.	(1;1;1)	(0;-1;-2)	(0;0;-1)
20.	(1;3;1)	(-2;3;4)	(1;0;-1)
21.	(2;3;4)	(1;1;1)	(1;5;3)
22.	(2;1;2)	(0;2;0)	(3;-1;1)
23.	(2;-1;2)	(0;-2;0)	(1;-3;3)
24.	(2;5;1)	(-2;4;-2)	(-2;7;-1)
25.	(0;1;1)	(1;1;0)	(0;0;-2)
26.	(-2;-3;1)	(0;-2;-1)	(4;0;-4)
27.	(0;0;2)	(0;-2;-2)	(-1;-1;-1)
28.	(0;0;2)	(0;2;0)	(1;1;1)
29.	(-1;-1;3)	(4;-1;-4)	(2;-1;-2)
30.	(-2;2;0)	(0;-2;0)	(1;-1;1)

Пример

Найдем ортогональный базис линейной оболочки векторов $\mathbf{a}_1=(2,1,3,-1)$, $\mathbf{a}_2=(7,4,3,-3)$, $\mathbf{a}_3=(1,1,-6,0)$, $\mathbf{a}_4=(5,7,7,8)$. Для этого применим процесс ортогонализации, то есть переход от системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ к системе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ по следующим формулам:

$$\bar{\mathbf{b}}_1 = \bar{\mathbf{a}}_1,$$

$$\overline{b_m} = \overline{a_m} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\overline{a_m} \cdot \overline{b_i}}{\overline{b_i}^2} \overline{b_i} \text{ для } m = 2, \dots, k \text{ (в случае, когда формула}$$

дает нулевой вектор, он отбрасывается).

По этим формулам получаем:

$$\mathbf{b}_1 = (2, 1, 3, -1);$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 = & (7, 4, 3, -3) - \frac{(7, 4, 3, -3) \cdot (2, 1, 3, -1)}{(2, 1, 3, -1)^2} (2, 1, 3, -1) = (7, 4, 3, -3) - \\ & - \frac{14 + 4 + 9 + 3}{4 + 1 + 9 + 1} (2, 1, 3, -1) = (7, 4, 3, -3) - 2(2, 1, 3, -1) = (3, 2, -3, -1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3 = & (1, 1, -6, 0) - \frac{(1, 1, -6, 0) \cdot (2, 1, 3, -1)}{(2, 1, 3, -1)^2} (2, 1, 3, -1) - \\ & - \frac{(1, 1, -6, 0) \cdot (3, 2, -3, -1)}{(3, 2, -3, -1)^2} (3, 2, -3, -1) = (1, 1, -6, 0) - \\ & - \frac{2 + 1 - 18 + 0}{4 + 1 + 9 + 1} (2, 1, 3, -1) - \frac{3 + 2 + 18 + 0}{9 + 4 + 9 + 1} (3, 2, -3, -1) = \\ & = (1, 1, -6, 0) + (2, 1, 3, -1) - (3, 2, -3, -1) = (0, 0, 0, 0) - \\ & \text{этот вектор в базис не входит;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_4 = & (5, 7, 7, 8) - \frac{(5, 7, 7, 8) \cdot (2, 1, 3, -1)}{(2, 1, 3, -1)^2} (2, 1, 3, -1) - \\ & - \frac{(5, 7, 7, 8) \cdot (3, 2, -3, -1)}{(3, 2, -3, -1)^2} (3, 2, -3, -1) = (5, 7, 7, 8) - \\ & - \frac{10 + 7 + 21 - 8}{4 + 1 + 9 + 1} (2, 1, 3, -1) - \frac{15 + 14 - 21 - 8}{9 + 4 + 9 + 1} (3, 2, -3, -1) = \\ & = (5, 7, 7, 8) - 2(2, 1, 3, -1) - 0(3, 2, -3, -1) = (1, 5, 1, 10). \end{aligned}$$

Мы получили три ненулевых вектора: $\mathbf{b}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 2, -3, -1)$, $\mathbf{b}_4 = (1, 5, 1, 10)$. Проверим, что эти векторы попарно ортогональны:

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = (2, 1, 3, -1) \cdot (3, 2, -3, -1) = 6 + 2 - 9 + 1 = 0;$$

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_4 = (2, 1, 3, -1) \cdot (1, 5, 1, 10) = 2 + 5 + 3 - 10 = 0;$$

$$\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_4 = (3, 2, -3, -1) \cdot (1, 5, 1, 10) = 3 + 10 - 3 - 10 = 0.$$

Ответ: ортогональный базис линейной оболочки данных векторов образуют векторы $(2,1,3,-1)$, $(3,2,-3,-1)$, $(1,5,1,10)$.•

Задание 11.

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 16

Вариант	Квадратичная форма
1.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$
2.	$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$
3.	$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$
4.	$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$
5.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$
6.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$
7.	$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$
8.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$
9.	$x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$
10.	$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$
11.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$
12.	$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$
13.	$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$
14.	$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$
15.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$
16.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$
17.	$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$
18.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$
19.	$x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$
20.	$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$
21.	$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$
22.	$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_3^2$
23.	$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$

24.	$4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-4x_3^2$
25.	$x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$
26.	$x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-x_3^2$
27.	$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-4x_3^2$
28.	$x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3-x_3^2$
29.	$x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$
30.	$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-x_3^2$

Пример

Приведем методом Лагранжа к каноническому виду квадратичную форму $x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-x_2x_3+x_3^2$.

1. Выберем ведущую переменную – такую переменную, которая входит в квадратичную форму и в квадрате, и в произведении на другую переменную. Выберем, например, переменную x_1 .

2. По ведущей переменной выделим полный квадрат:
 $x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-x_2x_3+x_3^2 = [x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2] - (x_2-x_3)^2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2 = (x_1+x_2-x_3)^2+x_2x_3$.

Введем новые переменные: $y_1 = x_1+x_2-x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$. Тогда квадратичная форма примет вид $y_1^2+y_2y_3$.

3. В квадратичной форме $y_1^2+y_2y_3$ ведущую переменную выбрать уже нельзя: y_1 входит только в квадрате, а y_2 и y_3 – только в произведении на другую переменную.

4. Пару переменных, входящих в квадратичную форму в виде произведения, примем за сумму и разность новых переменных, а переменную, входящую в квадратичную форму в квадрате, сохраним: $y_1=z_1$, $y_2 = z_2+z_3$, $y_3 = z_2-z_3$. Тогда $y_1^2+y_2y_3 = z_1^2+(z_2+z_3)(z_2-z_3) = z_1^2+z_2^2-z_3^2$. Эта квадратичная форма не содержит произведений переменных, то есть имеет канонический вид.

Ответ: $z_1^2+z_2^2-z_3^2$. •

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Лань, 2010.
4. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Лань, 2008.

Учебно-методическое издание

Арутюнян Елена Бабкеновна

Родина Елена Викторовна

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания

Усл.-печ. л.	Сдано в печать	Тираж
Изд. №	Формат	Цена
	Заказ	

127994, Москва, ул. Образцова, 9, стр.9
Типография МИИТа

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Кафедра «Прикладная математика-1»

Е.Б.Арутюнян, Е.В.Родина

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания
для студентов
направлений УВА, УЗС, УИС, УПИ, УЭМ

Москва – 2013