МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

---

Кафедра «Прикладная математика-1»

Е.Б.Арутюнян, Е.В.Родина

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания
для студентов
направлений УВА, УЗС, УИС, УПИ, УЭМ

Москва – 2013

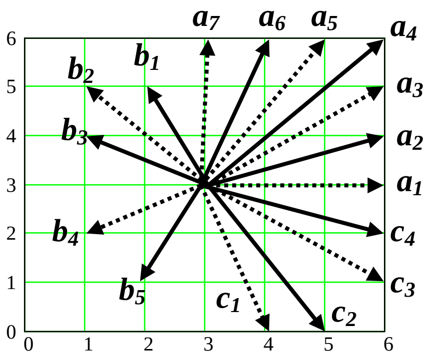
УДК……..

Арутюнян Е.Б., Родина Е.В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Методические указания для студентов направлений УВА, УЗС, УИС, УПИ, УЭМ. М. :МИИТ, 2013. – 125 с.

Сборник содержит задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов по темам: «Векторная алгебра», «Прямая на плоскости», «Кривые второго порядка», «Прямые и плоскости в пространстве», «Матрицы, определители, системы линейных уравнений», «Линейные пространства, линейные преобразования». По каждому типу заданий приведены образцы подробных решений. Сборник предназначен для направлений УЭМ, УЗС (курс «Математика»), УПИ (курс «Алгебра и геометрия»), УВА, УИС (курс «Алгебра») в первом и втором семестрах.

# Тема 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

**Задание 1**. *Постройте на плоскости векторы* $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{m}$, *являющиеся линейными комбинациями заданных векторов*.



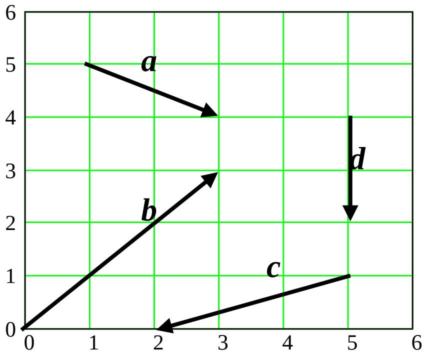

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 1.

| Номер варианта | Вектор $\boldsymbol{n}$ | Вектор $\boldsymbol{m}$ |
|---|---|---|
| 1 | $\boldsymbol{n} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{b}_1 - 1\frac{2}{3}\boldsymbol{b}_5$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_1$ |
| 2 | $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{a}_2 - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}_1 + 1\frac{1}{3}\boldsymbol{c}_1$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{3}\,\boldsymbol{a}_2$ |
| 3 | $\boldsymbol{n} = 0.5\boldsymbol{a}_3 - 1\frac{1}{4}\boldsymbol{b}_3 + \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_7$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_3$ |
| 4 | $\boldsymbol{n} = -\frac{3}{4}\boldsymbol{a}_4 + 2\boldsymbol{c}_4 - 1\frac{2}{3}\boldsymbol{b}_2$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{b}_1$ |
| 5 | $\boldsymbol{n} = 1.5\boldsymbol{a}_5 - \frac{3}{4}\boldsymbol{c}_3 + 2\boldsymbol{b}_3$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{5}\,\boldsymbol{b}_2$ |
| 6 | $\boldsymbol{n} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_6 + 2\boldsymbol{b}_3 + 2\frac{1}{4}\boldsymbol{b}_5$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{5}\,\boldsymbol{b}_3$ |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | $\boldsymbol{n} = 1\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_7 - 0{,}5\boldsymbol{b}_3 - \frac{1}{4}\boldsymbol{c}_4$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{c}_1$ |
| 8 | $\boldsymbol{n} = 1{,}5\boldsymbol{a}_1 - \frac{2}{3}\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{c}_1$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{2}\,\boldsymbol{c}_2$ |
| 9 | $\boldsymbol{n} = -0{,}5\boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}_5 - 1\frac{1}{3}\boldsymbol{c}_4$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{3}\,\boldsymbol{c}_3$ |
| 10 | $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{a}_3 + 0{,}5\boldsymbol{c}_3 - 1\frac{2}{3}\boldsymbol{b}_1$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{b}_5$ |
| 11 | $\boldsymbol{n} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{c}_3 + 1\frac{2}{3}\boldsymbol{b}_4$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_4$ |
| 12 | $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{a}_3 - \frac{1}{3}\boldsymbol{c}_4 + 1\frac{1}{3}\boldsymbol{b}_2$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{3}\,\boldsymbol{a}_5$ |
| 13 | $\boldsymbol{n} = 0{,}5\boldsymbol{a}_4 - 1\frac{1}{4}\boldsymbol{c}_2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{b}_5$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_6$ |
| 14 | $\boldsymbol{n} = -\frac{3}{4}\boldsymbol{a}_5 + 2\boldsymbol{b}_3 - 1\frac{2}{3}\boldsymbol{c}_1$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{b}_4$ |
| 15 | $\boldsymbol{n} = 1{,}5\boldsymbol{a}_6 - \frac{3}{4}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{c}_2$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{5}\,\boldsymbol{b}_5$ |
| 16 | $\boldsymbol{n} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_7 + 2\boldsymbol{a}_3 + 1\frac{1}{4}\boldsymbol{b}_5$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{5}\,\boldsymbol{b}_1$ |
| 17 | $\boldsymbol{n} = 1\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_1 - 0{,}5\boldsymbol{b}_1 - \frac{1}{4}\boldsymbol{b}_5$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_7$ |
| 18 | $\boldsymbol{n} = 1{,}5\boldsymbol{a}_2 - \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{b}_5$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_2$ |
| 19 | $\boldsymbol{n} = -0{,}5\boldsymbol{a}_3 + \frac{1}{3}\boldsymbol{c}_3 - 1\frac{1}{3}\boldsymbol{b}_4$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{3}\,\boldsymbol{a}_3$ |
| 20 | $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{b}_4 + 0{,}5\boldsymbol{a}_7 - 1\frac{1}{3}\boldsymbol{b}_1$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{a}_5$ |
| 21 | $\boldsymbol{n} = \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{b}_1 + 1\frac{2}{3}\boldsymbol{b}_5$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_2$ |

| | | |
|---|---|---|
| 22 | $\boldsymbol{n} = -2\mathrm{a}_2 + \frac{1}{3}\mathrm{b}_1 - 1\frac{1}{3}\mathrm{c}_1$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{3}\,\boldsymbol{a}_1$ |
| 23 | $\boldsymbol{n} = -0{,}5\boldsymbol{a}_3 - \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_7 + 1\frac{1}{4}\boldsymbol{b}_3$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}_1$ |
| 24 | $\boldsymbol{n} = \frac{3}{4}\boldsymbol{a}_4 + 1\frac{2}{3}\boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{c}_4$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{b}_3$ |
| 25 | $\boldsymbol{n} = -1{,}5\boldsymbol{a}_5 - 2\boldsymbol{b}_3 + \frac{3}{4}\boldsymbol{c}_3$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{5}\,\boldsymbol{b}_1$ |
| 26 | $\boldsymbol{n} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_6 - 2\boldsymbol{b}_3 - 2\frac{1}{4}\boldsymbol{b}_5$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{5}\,\boldsymbol{b}_2$ |
| 27 | $\boldsymbol{n} = -1\frac{2}{3}\boldsymbol{a}_7 + 0{,}5\boldsymbol{b}_3 + \frac{1}{4}\mathbf{c}_4$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{2}\,\boldsymbol{c}_2$ |
| 28 | $\boldsymbol{n} = -1{,}5\boldsymbol{a}_1 + \frac{2}{3}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{c}_1$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{2}\,\boldsymbol{c}_1$ |
| 29 | $\boldsymbol{n} = 0{,}5\boldsymbol{a}_2 - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}_5 + 1\frac{1}{3}\boldsymbol{c}_4$ | $\boldsymbol{m} = -\sqrt{3}\,\boldsymbol{b}_3$ |
| 30 | $\boldsymbol{n} = -2\boldsymbol{a}_3 + 1\frac{2}{3}\boldsymbol{b}_1 - 0{,}5\boldsymbol{c}_3$ | $\boldsymbol{m} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{a}_1$ |

**Пример**. *Даны векторы* ***a*, *b*, *c*, *d*:**



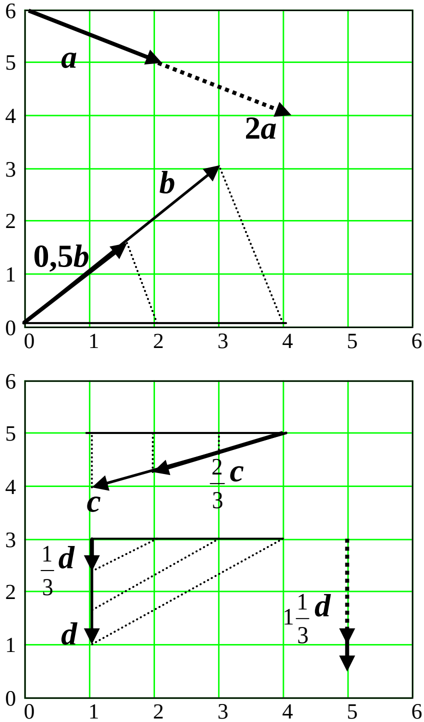

*Постройте на плоскости векторы* ***n*** и ***m*:**

$$\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{a} + 0{,}5\boldsymbol{b} - \frac{2}{3}\boldsymbol{c} - 1\frac{1}{3}\boldsymbol{d}, \quad \boldsymbol{m} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{a}.$$

**Решение**.

1) Построение вектора $\boldsymbol{n}$.

Сначала построим векторы $2\boldsymbol{a}$, $0{,}5\boldsymbol{b}$, $\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$ и $1\frac{1}{3}\boldsymbol{d}$.

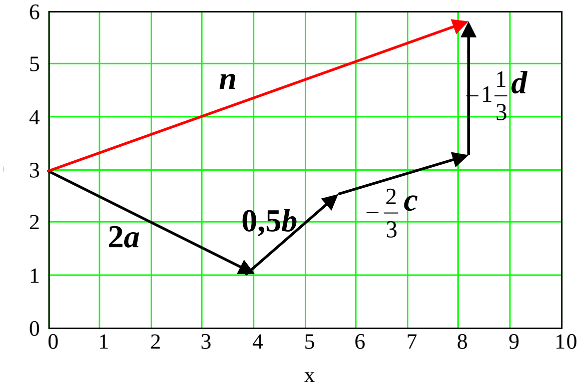



Для увеличения длины вектора $\boldsymbol{a}$ в k раз (k є N) необходимо на прямой, параллельной этому вектору, отложить k длин вектора $\boldsymbol{a}$.

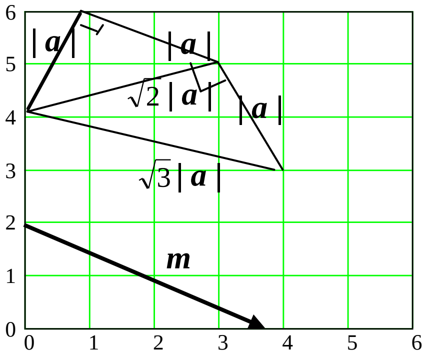
Для уменьшения длины вектора $\boldsymbol{b}$ в k раз (k є N) удобно воспользоваться теоремой Фалеса: построить угол, одна из сторон которого параллельна вектору $\boldsymbol{b}$, и на другой стороне отложить k равных отрезков; конец последнего из них соединяем с концом вектора $\boldsymbol{b}$ и через точки деления проводим параллельные прямые.

Теперь построим вектор $\boldsymbol{n}$ методом многоугольника:

$$\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{a} + 0{,}5\boldsymbol{b} - \frac{2}{3}\boldsymbol{c} - 1\frac{1}{3}\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{a} + 0{,}5\boldsymbol{b} + \left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right) + \left(-1\frac{1}{3}\boldsymbol{d}\right).$$




2) Построение вектора $\boldsymbol{m} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{a}$.




Искомый вектор $\boldsymbol{m}$ сонаправлен вектору $\boldsymbol{a}$, так как получен из него умножением на положительное число. Для нахождения длины вектора $\boldsymbol{m}$ воспользуемся теоремой Пифагора: построим прямоугольный треугольник с катетами длины $|\boldsymbol{a}|$, тогда длина гипотенузы будет равна $\sqrt{2}\,|\boldsymbol{a}|$, т.к. $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{a}|^2=2\cdot|\boldsymbol{a}|^2$; затем построим прямоугольный треугольник с катетами длины $|\boldsymbol{a}|$ и $\sqrt{2}\,|\boldsymbol{a}|$ – длина гипотенузы будет равна $\sqrt{3}\,|\boldsymbol{a}|$, т.к. $|\boldsymbol{a}|^2+(\sqrt{2}\,|\boldsymbol{a}|)^2 =3\cdot|\boldsymbol{a}|^2$. Отложив на луче, сонаправленнном вектору ***a***, найденный отрезок, получим вектор ***m***.

**Задание 2.** *Зная длины векторов* ***m*** *и* ***n*** *и угол α между этими векторами, найдите число С.*

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 2.

| Номер варианта | $\|m\|$ | $\|n\|$ | α | ***a***, ***b*** | *C* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | $\frac{\pi}{3}$ | $-5\mathbf{m}-4\mathbf{n}$<br>$3\mathbf{m}+6\mathbf{n}$ | $(-2\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b})(\mathbf{a}+2\mathbf{b})$ |
| 2 | 1 | 3 | $\pi$ | $-2\mathbf{m}+3\mathbf{n}$<br>$4\mathbf{m}-\mathbf{n}$ | $(3\mathbf{a}+2\mathbf{b})(-2\mathbf{a}+4\mathbf{b})$ |
| 3 | 4 | 5 | $\frac{2\pi}{3}$ | $5\mathbf{m}-2\mathbf{n}$<br>$-3\mathbf{m}-\mathbf{n}$ | $(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})(-\mathbf{a}+5\mathbf{b})$ |
| 4 | 3 | 2 | $\frac{\pi}{3}$ | $5\mathbf{m}+2\mathbf{n}$<br>$-6\mathbf{m}-4\mathbf{n}$ | $(-\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b})(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})$ |
| 5 | 2 | 3 | $\frac{\pi}{3}$ | $3\mathbf{m}-2\mathbf{n}$<br>$-4\mathbf{m}+5\mathbf{n}$ | $(2\mathbf{a}-3\mathbf{b})(5\mathbf{a}+\mathbf{b})$ |
| 6 | 2 | 4 | $\frac{2\pi}{3}$ | $2\mathbf{m}-5\mathbf{n}$<br>$-3\mathbf{m}+4\mathbf{n}$ | $(3\mathbf{a}-4\mathbf{b})(2\mathbf{a}+3\mathbf{b})$ |
| 7 | 2 | 5 | $\frac{2\pi}{3}$ | $3\mathbf{m}+2\mathbf{n}$<br>$-4\mathbf{m}-2\mathbf{n}$ | $(\mathbf{a}-3\mathbf{b})(0\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b})$ |
| 8 | 3 | 2 | $\pi$ | $5\mathbf{m}+2\mathbf{n}$<br>$\mathbf{m}-4\mathbf{n}$ | $(\mathbf{a}-2\mathbf{b})(3\mathbf{a}-4\mathbf{b})$ |
| 9 | 3 | 6 | $\frac{2\pi}{3}$ | $-3\mathbf{m}-2\mathbf{n}$<br>$\mathbf{m}+5\mathbf{n}$ | $(-\mathbf{a}+2\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ |
| 10 | 4 | 1 | $\frac{2\pi}{3}$ | $5\mathbf{m}-3\mathbf{n}$<br>$4\mathbf{m}+2\mathbf{n}$ | $(2\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b})(3\mathbf{a}-0\mathbf{b})$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 6 | 3 | $\frac{\pi}{3}$ | $-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$<br>$3\boldsymbol{m}-6\boldsymbol{n}$ | $(3\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$ |
| 12 | 3 | 2 | $\frac{\pi}{3}$ | $-2\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$<br>$3\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ | $(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ |
| 13 | 4 | 5 | $\frac{\pi}{2}$ | $4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$<br>$-\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ | $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ |
| 14 | 2 | 5 | 0 | $-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$<br>$5\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ | $(-3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})\ (2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$ |
| 15 | 4 | 7 | $\frac{2\pi}{3}$ | $4\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$<br>$5\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ | $(-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\ (2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ |
| 16 | 5 | 4 | $\pi$ | $-5\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$<br>$2\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}$ | $(-3\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b})\ (-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ |
| 17 | 2 | 5 | $\frac{\pi}{2}$ | $5\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$<br>$3\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}$ | $(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$ |
| 18 | 3 | 4 | $\frac{\pi}{3}$ | $7\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$<br>$2\boldsymbol{m}+6\boldsymbol{n}$ | $(3\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b})\ (2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ |
| 19 | 6 | 3 | $\frac{2\pi}{3}$ | $4\boldsymbol{m}-5\boldsymbol{n}$<br>$-\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$ | $(2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ |
| 20 | 1 | 6 | $\frac{\pi}{2}$ | $3\boldsymbol{m}-5\boldsymbol{n}$<br>$-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$ | $(4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$ |
| 21 | 2 | 7 | $\pi$ | $-5\boldsymbol{m}-6\boldsymbol{n}$<br>$2\boldsymbol{m}+7\boldsymbol{n}$ | $(-2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$ |
| 22 | 2 | 9 | $\frac{\pi}{3}$ | $-7\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$<br>$4\boldsymbol{m}+6\boldsymbol{n}$ | $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\ (-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$ |
| 23 | 2 | 9 | $\frac{2\pi}{3}$ | $5\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}$<br>$-6\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ | $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b})$ |
| 24 | 2 | 11 | $\frac{\pi}{2}$ | $-5\boldsymbol{m}-7\boldsymbol{n}$<br>$-3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ | $(-3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})\ (-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ |
| 25 | 4 | 3 | $\frac{2\pi}{3}$ | $5\boldsymbol{m}-8\boldsymbol{n}$<br>$-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$ | $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 3 | 2 | $\frac{\pi}{2}$ | $2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$<br>$3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$ | $(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$ |
| 27 | 1 | 4 | $\frac{\pi}{3}$ | $-2\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}$<br>$-\boldsymbol{m}+5\boldsymbol{n}$ | $(-4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ |
| 28 | 5 | 3 | $\frac{3\pi}{2}$ | $4\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}$<br>$-6\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$ | $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b})$ |
| 29 | 3 | 6 | $\pi$. | $3\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$<br>$4\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ | $(-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})$ |
| 30 | 2 | 7 | $\frac{\pi}{2}$ | $-2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$<br>$-6\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}$ | $(-3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$ |

**Пример**. *Зная длины векторов* $|\boldsymbol{m}| = 2$ *и* $|\boldsymbol{n}| = 4$ *и угол между этими векторами* $\alpha=\frac{5\pi}{6}$, *найдите* $C=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$, *где* $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$.

**Решение**.

$C=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(2(3\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})-(2\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}))^2=(6\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{m}+8\boldsymbol{n})^2=(4\boldsymbol{m}+6\boldsymbol{n})^2=16\boldsymbol{m}^2+48\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+36\boldsymbol{n}^2=16|\boldsymbol{m}|^2+48|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|\cdot\cos(\alpha)+36|\boldsymbol{n}|^2=$

$=16\cdot4+48\cdot2\cdot4\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+36\cdot16 = 640+384\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = 640 - 384\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 640-384\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 640-192\sqrt{3}$.

**Ответ**: $C = 640-192\sqrt{3}$.

**Задание 3**. *Используя рисунок, представьте векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *как линейные комбинации векторов* $\boldsymbol{e}_1$ *и* $\boldsymbol{e}_2$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 3.

1 – 15.

Дан параллелограмм ABCD. Точки E, F, M, N делят стороны AB, BC, CD, DA в отношении 1 : 2, считая от точек A, B, C, D соответственно; O – пересечение диагоналей параллелограмма.

| Номер варианта | $\boldsymbol{a}$ | $\boldsymbol{B}$ | $\boldsymbol{e}_1$ | $\boldsymbol{e}_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\overline{AC}$ | $\overline{OF}$ | $\overline{AB}$ | $\overline{ND}$ |
| 2 | $\overline{AF}$ | $\overline{OM}$ | $\overline{AB}$ | $\overline{ND}$ |
| 3 | $\overline{DB}$ | $\overline{ON}$ | $\overline{AB}$ | $\overline{ND}$ |
| 4 | $\overline{FN}$ | $\overline{OE}$ | $\overline{AB}$ | $\overline{ND}$ |
| 5 | $\overline{AB}$ | $\overline{OM}$ | $\overline{CF}$ | $\overline{AO}$ |
| 6 | $\overline{OF}$ | $\overline{CN}$ | $\overline{CF}$ | $\overline{AO}$ |
| 7 | $\overline{ON}$ | $\overline{MF}$ | $\overline{CF}$ | $\overline{AO}$ |
| 8 | $\overline{OE}$ | $\overline{CD}$ | $\overline{CF}$ | $\overline{AO}$ |
| 9 | $\overline{BC}$ | $\overline{EA}$ | $\overline{OF}$ | $\overline{OC}$ |
| 10 | $\overline{ND}$ | $\overline{MC}$ | $\overline{OF}$ | $\overline{OC}$ |
| 11 | $\overline{MD}$ | $\overline{ON}$ | $\overline{OF}$ | $\overline{OC}$ |
| 12 | $\overline{NA}$ | $\overline{EF}$ | $\overline{OF}$ | $\overline{OC}$ |
| 13 | $\overline{AB}$ | $\overline{OM}$ | $\overline{BE}$ | $\overline{OA}$ |
| 14 | $\overline{OD}$ | $\overline{FC}$ | $\overline{BE}$ | $\overline{OA}$ |
| 15 | $\overline{CD}$ | $\overline{MN}$ | $\overline{BE}$ | $\overline{OA}$ |

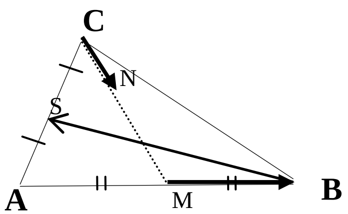
16 – 30.

Дана равнобедренная трапеция ABCD. Точки E, F, M, N – середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Точка O пересечения диагоналей трапеции делит их в отношении 1:2, считая от вершин B и C.

| Номер варианта | $\boldsymbol{a}$ | $\boldsymbol{B}$ | $\boldsymbol{e}_1$ | $\boldsymbol{e}_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 16 | $\overline{AD}$ | $\overline{OF}$ | $\overline{AE}$ | $\overline{OD}$ |
| 17 | $\overline{AO}$ | $\overline{ON}$ | $\overline{AE}$ | $\overline{OD}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 18 | $\overline{BN}$ | $\overline{FC}$ | $\overline{AE}$ | $\overline{OD}$ |
| 19 | $\overline{BC}$ | $\overline{EF}$ | $\overline{AE}$ | $\overline{OD}$ |
| 20 | $\overline{BD}$ | $\overline{OF}$ | $\overline{FC}$ | $\overline{DM}$ |
| 21 | $\overline{NF}$ | $\overline{MO}$ | $\overline{FC}$ | $\overline{DM}$ |
| 22 | $\overline{FM}$ | $\overline{EN}$ | $\overline{FC}$ | $\overline{DM}$ |
| 23 | $\overline{BA}$ | $\overline{ME}$ | $\overline{FC}$ | $\overline{DM}$ |
| 24 | $\overline{OE}$ | $\overline{NM}$ | $\overline{OA}$ | $\overline{OB}$ |
| 25 | $\overline{FC}$ | $\overline{OM}$ | $\overline{OA}$ | $\overline{OB}$ |
| 26 | $\overline{ND}$ | $\overline{OF}$ | $\overline{OA}$ | $\overline{OB}$ |
| 27 | $\overline{CM}$ | $\overline{ON}$ | $\overline{OA}$ | $\overline{OB}$ |
| 28 | $\overline{BE}$ | $\overline{EN}$ | $\overline{OF}$ | $\overline{ND}$ |
| 29 | $\overline{DM}$ | $\overline{EM}$ | $\overline{OF}$ | $\overline{ND}$ |
| 30 | $\overline{FE}$ | $\overline{NM}$ | $\overline{OF}$ | $\overline{ND}$ |

**Пример**. *Дан треугольник ABC. Точки M, S – середины AB и AC соответственно, точка N делит CM в отношении 1:2, считая от точки C. Представьте вектор* $\overline{BS}$ *как линейную комбинацию векторов* $\overline{MB}$ *и* $\overline{CN}$.




**Решение**.

$\overline{BS} = \overline{BA} + \overline{AS}$, $\overline{BA} = -2\overline{MB}$, значит, $\overline{BS} = -2\overline{MB} + \overline{AS}$.

$\overline{AS} = 0{,}5\,\overline{AC} = 0{,}5(\overline{AM} + \overline{MC}) = 0{,}5(\overline{MB} + 3\overline{NC}) = 0{,}5(\overline{MB} - 3\overline{CN})$. Следовательно, $\overline{BS} = -2\overline{MB} + 0{,}5(\overline{MB} - 3\overline{CN}) = -1{,}5\overline{MB} - 1{,}5\overline{CN}$.

**Ответ**: $\overline{BS} = -1.5\overline{MB} - 1.5\overline{CN}$.

**<u>Задание 4</u>.** *Используя рисунок, найдите координаты векторов* ***a*** *и* ***b*** *в базисе* (***e***$_1$, ***e***$_2$, ***e***$_3$).

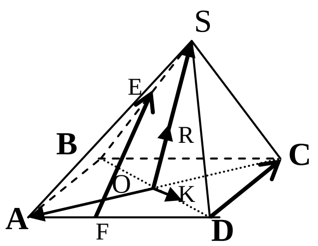
Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки E, F, M, N делят ребра AB, BC, CD, DA в отношении 1:2 соответственно. Точки $E_1$, $F_1$, $M_1$, $N_1$ – середины ребер $A_1B_1$, $B_1C_1$, $C_1D_1$, $D_1A_1$ соответственно. Точки P, R, S, T делят ребра $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ в отношении 1:3 соответственно. O – точка пересечения диагоналей параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

## <u>ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 4</u>.

| Номер варианта | ***a*** | ***b*** | ***e***$_1$ | ***e***$_2$ | ***e***$_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\overline{DB}$ | $\overline{OD_1}$ | $\overline{DN}$ | $\overline{DM}$ | $\overline{DT}$ |
| 2 | $\overline{DC_1}$ | $\overline{PS}$ | $\overline{DM}$ | $\overline{DT}$ | $\overline{DN}$ |
| 3 | $\overline{DA_1}$ | $\overline{EM_1}$ | $\overline{DT}$ | $\overline{DN}$ | $\overline{DM}$ |
| 4 | $\overline{SM_1}$ | $\overline{OE}$ | $\overline{DN}$ | $\overline{DT}$ | $\overline{DM}$ |
| 5 | $\overline{FC}$ | $\overline{ON_1}$ | $\overline{BF}$ | $\overline{BR}$ | $\overline{BE}$ |
| 6 | $\overline{CB_1}$ | $\overline{MF_1}$ | $\overline{BR}$ | $\overline{BE}$ | $\overline{BF}$ |
| 7 | $\overline{NM}$ | $\overline{TO}$ | $\overline{BE}$ | $\overline{BF}$ | $\overline{BR}$ |
| 8 | $\overline{RB_1}$ | $\overline{F_1T}$ | $\overline{BF}$ | $\overline{BE}$ | $\overline{BR}$ |
| 9 | $\overline{D_1P}$ | $\overline{SO}$ | $\overline{AP}$ | $\overline{AE}$ | $\overline{AN}$ |
| 10 | $\overline{AC_1}$ | $\overline{TR}$ | $\overline{AE}$ | $\overline{AN}$ | $\overline{AP}$ |
| 11 | $\overline{A_1P}$ | $\overline{M_1O}$ | $\overline{AN}$ | $\overline{AP}$ | $\overline{AE}$ |
| 12 | $\overline{CE}$ | $\overline{TE_1}$ | $\overline{AP}$ | $\overline{AN}$ | $\overline{AE}$ |
| 13 | $\overline{B_1C}$ | $\overline{OR}$ | $\overline{CM}$ | $\overline{CF}$ | $\overline{CS}$ |
| 14 | $\overline{EN}$ | $\overline{E_1T}$ | $\overline{CS}$ | $\overline{CM}$ | $\overline{CF}$ |
| 15 | $\overline{AN}$ | $\overline{PT}$ | $\overline{CF}$ | $\overline{CS}$ | $\overline{CM}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | $\overline{C_1C}$ | $\overline{NO}$ | $\overline{CM}$ | $\overline{CS}$ | $\overline{CF}$ |
| 17 | $\overline{OB_1}$ | $\overline{N_1E}$ | $\overline{B_1R}$ | $\overline{B_1E_1}$ | $\overline{B_1F_1}$ |
| 18 | $\overline{RF_1}$ | $\overline{TE}$ | $\overline{B_1F_1}$ | $\overline{B_1R}$ | $\overline{B_1E_1}$ |
| 19 | $\overline{D_1F_1}$ | $\overline{M_1E}$ | $\overline{B_1E_1}$ | $\overline{B_1F_1}$ | $\overline{B_1R}$ |
| 20 | $\overline{N_1R}$ | $\overline{PM}$ | $\overline{B_1R}$ | $\overline{B_1F_1}$ | $\overline{B_1E_1}$ |
| 21 | $\overline{NN_1}$ | $\overline{OT}$ | $\overline{A_1E_1}$ | $\overline{A_1N_1}$ | $\overline{A_1P}$ |
| 22 | $\overline{EE_1}$ | $\overline{MR}$ | $\overline{A_1P}$ | $\overline{A_1E_1}$ | $\overline{A_1N_1}$ |
| 23 | $\overline{E_1B_1}$ | $\overline{RM}$ | $\overline{A_1N_1}$ | $\overline{A_1P}$ | $\overline{A_1E_1}$ |
| 24 | $\overline{AN_1}$ | $\overline{NS}$ | $\overline{A_1E_1}$ | $\overline{A_1P}$ | $\overline{A_1N_1}$ |
| 25 | $\overline{CD_1}$ | $\overline{ET}$ | $\overline{C_1N_1}$ | $\overline{C_1M_1}$ | $\overline{C_1F_1}$ |
| 26 | $\overline{MN_1}$ | $\overline{EO}$ | $\overline{C_1F_1}$ | $\overline{C_1N_1}$ | $\overline{C_1M_1}$ |
| 27 | $\overline{E_1N_1}$ | $\overline{OP}$ | $\overline{C_1M_1}$ | $\overline{C_1M_1}$ | $\overline{C_1N_1}$ |
| 28 | $\overline{N_1F_1}$ | $\overline{OA}$ | $\overline{C_1N_1}$ | $\overline{C_1F_1}$ | $\overline{C_1M_1}$ |
| 29 | $\overline{TN_1}$ | $\overline{OB_1}$ | $\overline{D_1M_1}$ | $\overline{D_1T}$ | $\overline{D_1N_1}$ |
| 30 | $\overline{E_1F_1}$ | $\overline{MO}$ | $\overline{D_1M_1}$ | $\overline{D_1T}$ | $\overline{D_1N_1}$ |

**Пример**. *Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD. Найти координаты векторов* $\overline{OS}$, $\overline{DC}$, $\overline{FE}$ *в базисе* $\overline{OA} = \boldsymbol{e}_1$, $\overline{OK} = \boldsymbol{e}_2$, $\overline{OR} = \boldsymbol{e}_3$, *если O – точка пересечения диагоналей основания ABCD; BE:ES=2:1; AF:FD=1:3; OR:RS=2:3; OK=KD.*



**<u>Решение</u>**. 1) $OS \parallel OR$ и $RS$=1,5$OR$ **,** значит,
$\overline{OS}=\overline{OR}+\overline{RS}=\overline{OR}+1{,}5\overline{OR}=2{,}5\overline{OR}=2{,}5\boldsymbol{e}_3$.
Итак, $\overline{OS}=2{,}5\boldsymbol{e}_3$, следовательно, $\overline{OS}=0\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+2{,}5\boldsymbol{e}_3$, то есть в данном базисе $\overline{OS}$ имеет координаты (0; 0; 2,5).

2) $\overline{DC}=\overline{DO}+\overline{OC}=-2\overline{OK}+(-\overline{OA})=-\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$, т.к. KD = KO, OC=OA, $\overline{DO}\uparrow\downarrow\overline{OK}$, $\overline{OC}\uparrow\downarrow\overline{OA}$. Итак, $\overline{DC}=-\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$, следовательно, $\overline{DC}=-1\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3$, то есть в данном базисе $\overline{DC}$ имеет координаты (–1; –2; 0).

3) $\overline{FE}=\overline{FA}+\overline{AB}+\overline{BE}$. Найдем каждое слагаемое.

а) Поскольку, по условию, DF=3FA и $\overline{DF}\uparrow\uparrow\overline{FA}$, то $\overline{DA}=\overline{DF}+\overline{FA}=3\overline{FA}+\overline{FA}=4\overline{FA}$**.** Значит, $\overline{FA}=0{,}25\overline{DA}$.

С другой стороны, $\overline{DA}=\overline{OA}-\overline{OD}=\overline{OA}-2\overline{OK}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$. Значит, $\overline{FA}=0{,}25\boldsymbol{e}_1-0.5\boldsymbol{e}_2$.

б) Так как $\overline{AB}=\overline{DC}$, то $\overline{AB}=-\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ (см. пункт 2).

в) По условию ES = 0,5BE. Перейдем к векторным равенствам:

$$\overline{BS}=\overline{BE}+\overline{ES}=\overline{BE}+0{,}5\overline{BE}=1.5\overline{BE},$$
$$\overline{BS}=\overline{BO}+\overline{OS}=2\overline{OK}+2{,}5\overline{OR}=2\boldsymbol{e}_2+2{,}5\boldsymbol{e}_3.$$

Значит, $\overline{BE}=\frac{4}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{5}{3}\boldsymbol{e}_3$.

Подставляя найденные выражения в равенство $\overline{FE}=\overline{FA}+\overline{AB}+\overline{BE}$, получаем:

$$\overline{FE}=(0{,}25\boldsymbol{e}_1-0{,}5\boldsymbol{e}_2)+(-\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+(\frac{4}{3}\boldsymbol{e}_2+\frac{5}{3}\boldsymbol{e}_3)=-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_1-\frac{7}{6}\boldsymbol{e}_2+\frac{5}{3}\boldsymbol{e}_3.$$

Итак, в данном базисе $\overline{FE}$ имеет координаты $(-\frac{3}{4};-\frac{7}{6};\frac{5}{3})$.

**Ответ**: $\overline{OS}$ (0;0;2,5); $\overline{DC}$ (–1;–2;0); $\overline{FE}$ $(-\frac{3}{4};-\frac{7}{6};\frac{5}{3})$.

**<u>Задание 5</u>.** *Для векторов* ***a***, ***b***, ***c*** *найдите координаты вектора* **d**; *найдите проекцию вектора* ***c*** *на вектор* **b**; *определите тип угла между векторами* ***a*** и **b**–***c*** *(острый, прямой, тупой). В каждом случае постройте геометрическую интерпретацию.*

<u>ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 5</u>.

| Номер варианта | ***a*** | ***В*** | ***c*** | ***d*** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (2;6) | (–1;3) | (–5;7) | 0,5***a*** + 2***b*** – ***c*** |
| 2 | (–2;3) | (3;–4) | (2;5) | 2***a*** + ***b*** + ***c*** |
| 3 | (–3;–2) | (1;–5) | (–4;3) | ***a*** – ***b*** + 2***c*** |
| 4 | (–6; 3) | (4;1) | (–3;–3) | ***a*** + 2***b*** + 2***c*** |
| 5 | (2;5) | (–3;2) | (–2;–6) | ***a*** + 2***b*** + ***c*** |
| 6 | (5;–4) | (3;4) | (–5;2) | ***a*** + ***b*** + 2***c*** |
| 7 | (–2;–7) | (–6;3) | (1;–2) | *a* – ***b*** – 4***c*** |
| 8 | (3;5) | (–4;–2) | (1;–6) | ***a*** + 2***b*** + ***c*** |
| 9 | (–2;–6) | (–3;5) | (6;–2) | ***a*** – ***b*** – ***c*** |
| 10 | (0;8) | (–6;2) | (–3;–3) | 0,5***a*** + ***b*** – 2***c*** |
| 11 | (–3;–1) | (2;5) | (–1;–4) | –2***a*** – ***b*** + ***c*** |
| 12 | (5;5) | (1;9) | (–2;–4) | ***a*** – ***b*** – 2***c*** |
| 13 | (1;7) | (–6;2) | (–4;–2) | 2***a*** – ***b*** – ***c*** |
| 14 | (6;2) | (–1;8) | (0;–5) | ***a*** – ***b*** + 2***c*** |
| 15 | (2;–5) | (–3;–6) | (1;4) | 2***a*** – ***b*** – 2***c*** |
| 16 | (–4;0) | (–2;–3) | (1;1) | ***a*** + 2***b*** – 3***c*** |
| 17 | (1;3) | (–2;5) | (–1;–1) | 3***a*** – ***b*** +2***c*** |
| 18 | (6;8) | (–5;–1) | (3;1) | 0,5***a*** + ***b*** – 2***c*** |
| 19 | (–2;–6) | (–4;2) | (–1;5) | ***a*** + 0,5***b*** + ***c*** |
| 20 | (1;6) | (5;0) | (–4;2) | ***a*** + ***b*** + 2***c*** |
| 21 | (6;8) | (1;–1) | (–2;–2) | 0,5***a*** –3***b*** + ***c*** |
| 22 | (–2;3) | (5;–2) | (8;12) | ***a*** + ***b*** – 0.5***c*** |
| 23 | (6;1) | (1;4) | (–4;–1) | ***a*** – 2***b*** – 2***c*** |
| 24 | (–6;–10) | (–1;–2) | (2;3) | 0,5***a*** – 2***b*** + ***c*** |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | (2;8) | (–6;1) | (–4;–1) | $0{,}5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$ |
| 26 | (–4;1) | (–6;–9) | (5;3) | $\boldsymbol{a} - \frac{1}{3}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ |
| 27 | (3;2) | (1;7) | (–4;–5) | $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ |
| 28 | (0;–7) | (–4;–1) | (1;2) | $-\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$ |
| 29 | (3;4) | (–5;1) | (1;5) | $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$ |
| 30 | (–2;5) | (4;1) | (0;6) | $-2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + 0{,}5\boldsymbol{c}$ |

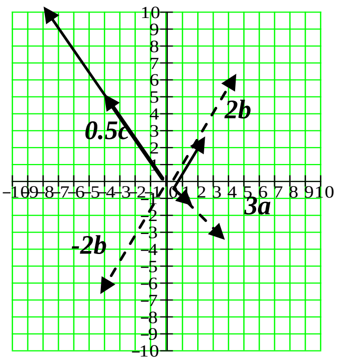
**Пример**. *Для векторов **a**(1;–1), **b**(2;3), **c**(–8;10) найдите координаты вектора **d**=3**a**–2**b**+0,5**c**; найдите проекцию вектора **c** на вектор **b**; определите тип угла между векторами 3**a** и **b**–**c** (острый, прямой, тупой). В каждом случае постройте геометрическую интерпретацию.*

**Решение**.

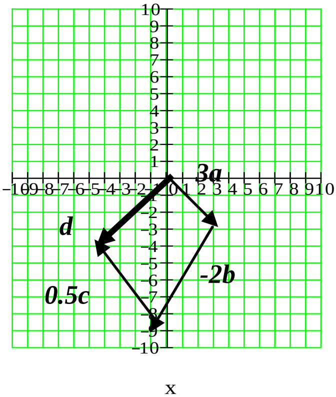
1)Вычислим координаты вектора $\boldsymbol{d} = 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 0.5\boldsymbol{c}$:

$\boldsymbol{d}$ =3(1;–1) –2(2;3)+0,5(–8;10) = (3;–3) –(4;6)+(–4;5) = =(–5;–4).

Геометрическая интерпретация линейных операций над векторами ***a***, ***b***, ***c*** на координатной плоскости:



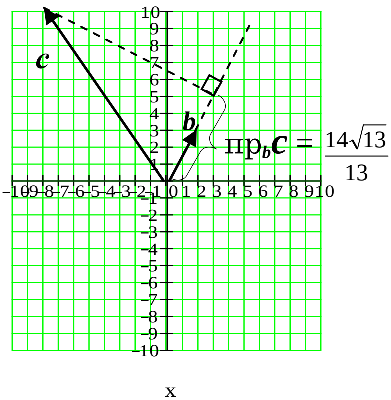

x




2)Найдем проекцию вектора ***c*** на вектор ***b***:

$$\text{пр}_{\bar b}\bar c = \frac{\bar b\cdot\bar c}{|\bar b|} = \frac{2\cdot(-8)+3\cdot 10}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{14}{\sqrt{13}} = \frac{14\sqrt{13}}{13}$$

Геометрическая интерпретация проекции вектора ***c*** на вектор ***b***:

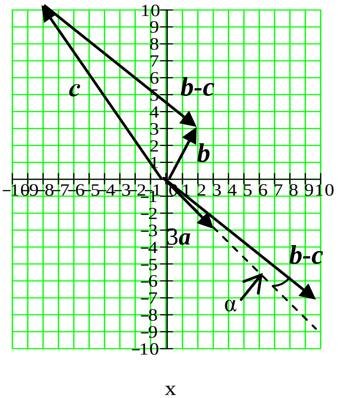



3)Найдем косинус угла между векторами 3***a*** и ***b***–***c***:

3***a***=(3;–3), ***b***–***c*** =(10;–7), $\cos\alpha = \dfrac{\bar a\cdot(\bar b-\bar c)}{|\bar a|\cdot|\bar b-\bar c|} =$

$$\frac{3\cdot 10+(-3)\cdot(-7)}{\sqrt{3^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{10^2+(-7)^2}}=\frac{51}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{149}}=\frac{51}{3\sqrt{298}}=\frac{17}{\sqrt{298}}>0,$$

следовательно, угол α между векторами 3***a*** и ***b***–***c*** – острый.




Для нахождения угла α на чертеже отложим вектор ***b***–***c*** от начала вектора 3***a***.

$$\cos\alpha=\frac{17}{\sqrt{298}}$$

**Ответ**: ***d***=(–5;–4); $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{c}=\dfrac{14\sqrt{13}}{13}$;
угол между векторами 3***a*** и ***b***–***c*** – острый.

<u>**Задание 6**</u>**.** *Для векторов* ***a***, ***b***, ***c*** *найдите координаты вектора* ***r****; найдите координаты векторного произведения* ***a***x***b****; вычислите смешанное произведение* ***abc****; укажите, правой или левой является упорядоченная тройка векторов* ***(a,b,c)****.* ***В*** *каждом случае постройте геометрическую интерпретацию.*

<u>ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 6</u>.

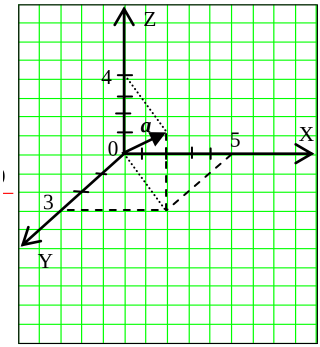
| Номер Варианта | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***r*** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (5;4;1) | (–3;5;2) | (2;–1;3) | ***a*** + ***b*** – 2***c*** |
| 2 | (2;–1;4) | (–3;0;–2) | (4;5;–3) | 2***a*** + 3***b*** – ***c*** |
| 3 | (–1;1;2) | (2;–3;–5) | (–6;3;–1) | 4***a*** + 2***b*** + ***c*** |
| 4 | (1;3;4) | (–2;5;0) | (3;–2;–4) | ***a*** – ***b*** + 2***c*** |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | (1;–1;1) | (–5;–3;1) | (2;–1;0) | 5***a*** + ***b*** – 2***c*** |
| 6 | (3;1;2) | (–7;–2;–4) | (–4;0;3) | ***a*** + ***b*** – ***c*** |
| 7 | (–3;0;1) | (2;7;–3) | (–4;3;5) | 2***a*** + ***b*** – ***c*** |
| 8 | (5;1;2) | (–2;1;–3) | (4;–3;5) | ***a*** + 2***b*** + ***c*** |
| 9 | (0;2;–3) | (4;–3;–2) | (–5;–4;0) | ***a*** + ***b*** + ***c*** |
| 10 | (3;–1;2) | (–2;3;1) | (4;–5;–3) | 3***a*** + 2***b*** – ***c*** |
| 11 | (5;3;1) | (–1;2;–3) | (3;–4;2) | ***a*** + 2***b*** + ***c*** |
| 12 | (3;1;–3) | (–2;4;1) | (1;–2;5) | 2***a*** + ***b*** + ***c*** |
| 13 | (6;1;–3) | (–3;2;1) | (–1;–3;4) | ***a*** + 2***b*** + 2***c*** |
| 14 | (4;2;3) | (–3;1;–8) | (2;–4;5) | ***a*** + ***b*** + ***c*** |
| 15 | (–2;1;3) | (3;–6;2) | (–5;–3;–1) | ***a*** + ***b*** – ***c*** |
| 16 | (1;3;6) | (–3;4;–5) | (1;–7;2) | ***a*** + ***b*** + ***c*** |
| 17 | (7;2;1) | (5;1;–2) | (–3;4;5) | ***a*** – ***b*** – ***c*** |
| 18 | (3;5;6) | (–2;7;–5) | (6;–2;1) | ***a*** – ***b*** – ***c*** |
| 19 | (5;3;2) | (2;–5;1) | (–7;4;–3) | ***a*** + ***b*** + ***c*** |
| 20 | (11;1;2) | (–3;3;–4) | (–4;–2;7) | ***a*** + ***b*** + ***c*** |
| 21 | (9;5;3) | (–3;2;1) | (4;–7;4) | ***a*** + 2***b*** + ***c*** |
| 22 | (7;2;1) | (3;–5;6) | (–4;3;–4) | ***a*** + ***b*** + ***c*** |
| 23 | (1;2;3) | (–5;3;–1) | (–6;4;5) | 2***a*** + ***b*** – ***c*** |
| 24 | (–2;5;1) | (3;2;–7) | (4;–3;2) | ***a*** + ***b*** + ***c*** |
| 25 | (3;1;2) | (–4;3;–1) | (2;3;4) | ***a*** + ***b*** – 2***c*** |
| 26 | (2;1;1) | (–3;2;0) | (1;–1;–1) | 2***a*** + 2***b*** – 3***c*** |
| 27 | (3;2;5) | (4;–2;1) | (3;3;3) | ***a*** – 2***b*** – ***c*** |
| 28 | (–4;2;1) | (3;–3;0) | (1;1;1) | 2***a*** + 2***b*** – ***c*** |
| 29 | (5;6;–2) | (–4;1;1) | (2;1;1) | ***a*** + 2***b*** – 2***c*** |
| 30 | (3;1;1) | (0;–1;2) | (–4;3;1) | 2***a*** – 3***b*** + ***c*** |

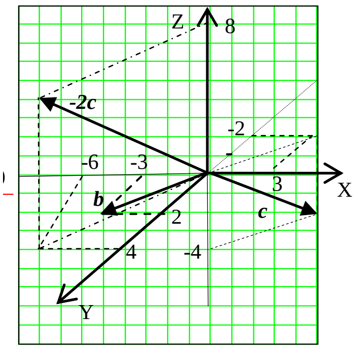
**Пример**. *Для векторов* **a**(*5;3;4*), **b**(*–3;2;0*), **c**(*3;–2;–4*) *найдите координаты вектора* **r**=**a**+**b**–2**c**; *найдите координаты векторного произведения* **a**x**b**; *вычислите смешанное произведение* **abc**; *укажите, правой или левой является упорядоченная тройка векторов* **(a,b,c). *В*** *каждом случае постройте геометрическую интерпретацию.*

**<u>Решение</u>**.1)Вычислим координаты вектора $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$:
$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c} = (5;\ 3;\ 4) + (-3;\ 2;\ 0) - 2(3;\ -2;\ -4) = (-4;\ 9;\ 12)$.

Построим геометрическую интерпретацию линейных операций над векторами ***a*, *b*, *c*.** Для построения вектора ***a***(5;3;4) необходимо провести прямые, параллельные осям координат Ox и Oy, через точки (0;3;0) и (5;0;0) соответственно. Через точку пересечения этих прямых надо провести прямую, параллельную оси Oz, и отложить на ней от точки пересечения 4 единицы вверх. С полученной точкой соединим начало координат. Вектор ***a***(5; 3; 4) построен.

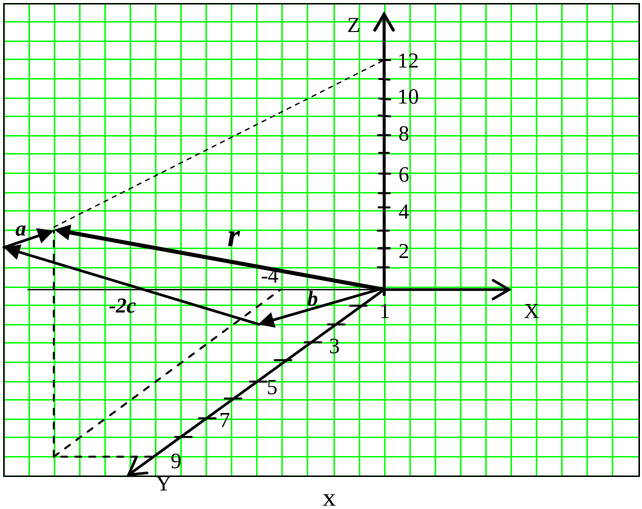



x




x

Аналогично построим векторы ***b*** и $-2\boldsymbol{c}$.



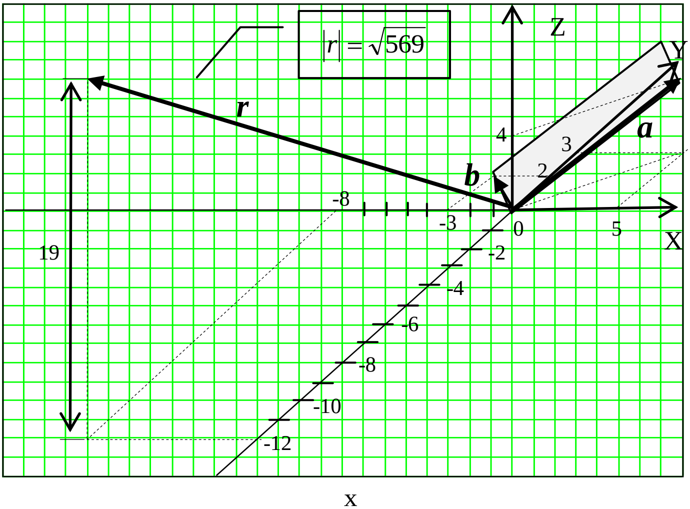

Для построения вектора $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$ воспользуемся правилом многоугольника. Легко проверить, что конец построенного вектора $\boldsymbol{r}$ имеет координаты (–4;9;12), то есть координаты вектора $\boldsymbol{r}$ получаются те же, что уже были вычислены.

2)Найдем координаты векторного произведения $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$:

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\cdot\bar{k} =$$

$= -8\cdot\bar{i} - 12\cdot\bar{j} + 19\cdot\bar{k}$. Значит, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (-8;-12;19)$.

Геометрическая интерпретация модуля векторного произведения: $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 19^2} = \sqrt{569}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.



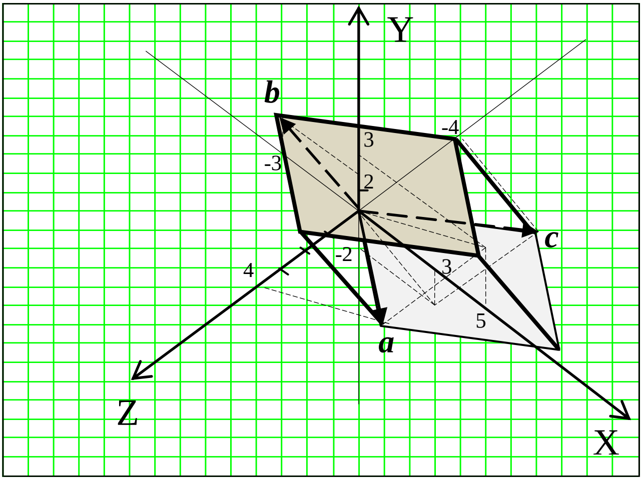

3)Вычислим смешанное произведение ***abc***:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -76.$$

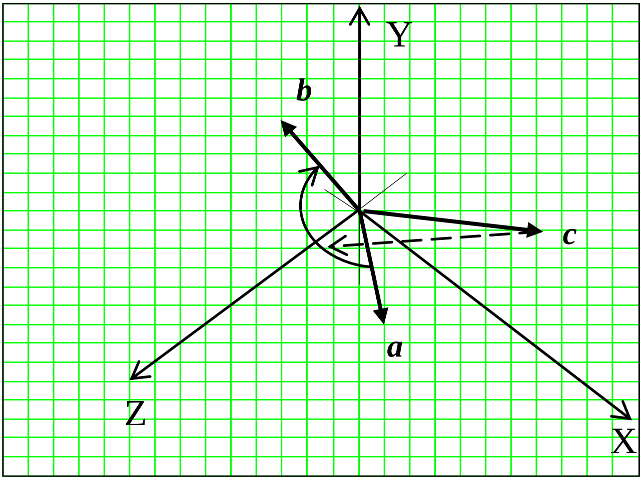
Геометрическая интерпретация смешанного произведения ***abc***: объем параллелепипеда, построенного на векторах ***a, b, c***, равен 76 (модуль смешанного произведения).

4)Поскольку ***abc*** = –76<0, то упорядоченная тройка векторов (***a***,***b***,***c***) – левая.

Геометрическая интерпретация отрицательной ориентации упорядоченной тройки векторов (***a,b,c***): ориентацию тройки векторов можно определить по «правилу буравчика» – движение от вектора ***a*** к вектору ***b*** происходит по часовой стрелке, если смотреть из конца вектора ***c***; следовательно, тройка (***a,b,c***) имеет отрицательную ориентацию (левая тройка).




x




x

**Ответ**: $\boldsymbol{r}$ = (–4; 9; 12); $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ = (–8; –12; 19);
$\boldsymbol{abc}$ = –76; тройка ($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$) – левая.

<u>**Задание 7**</u>**.** *Для данных векторов* **a** и **b** *подобрать: вектор* **c**, *коллинеарный вектору* **a**; *вектор* **n**, *ортогональный вектору* **a**; *вектор* **e** *так, чтобы векторы* **a, b, e** *были компла-*

*нарны; вектор* **d** *так, чтобы тройка* (**a**,**b**,**d**) *была базисом с заданной ориентацией.*

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 7.

| Номер варианта | ***a*** | ***b*** | Ориентация базиса (***a***,***b***,***d***) |
|---|---|---|---|
| 1 | (1;3;4) | (–2;5;0) | Положительная |
| 2 | (3;1;2) | (–7;–2;–4) | Отрицательная |
| 3 | (–1;1;2) | (2;–3;–5) | Положительная |
| 4 | (2;–1;3) | (–3;5;2) | Отрицательная |
| 5 | (1;–1;1) | (–5;–3;1) | Положительная |
| 6 | (2;–1;4) | (–3;0;–2) | Отрицательная |
| 7 | (–3;0;1) | (2;7;–3) | Положительная |
| 8 | (3;–1;2) | (–2;3;1) | Отрицательная |
| 9 | (0;2;–3) | (4;–3;–2) | Положительная |
| 10 | (6;1;–3) | (–3;2;1) | Отрицательная |
| 11 | (1;3;6) | (–3;4;–5) | Положительная |
| 12 | (3;1;–3) | (–2;4;1) | Отрицательная |
| 13 | (1;–7;2) | (4;–3;5) | Положительная |
| 14 | (4;2;3) | (–3;1;–8) | Отрицательная |
| 15 | (–2;1;3) | (3;–6;2) | Положительная |
| 16 | (5;3;1) | (–1;2;–3) | Отрицательная |
| 17 | (6;–2;1) | (5;1;–2) | Положительная |
| 18 | (3;5;6) | (–2;7;–5) | Отрицательная |
| 19 | (5;3;2) | (2;–5;1) | Положительная |
| 20 | (–7;4;–3) | (–3;3;4) | Отрицательная |
| 21 | (4;–7;4) | (11;1;2) | Положительная |
| 22 | (7;2;1) | (–4;3;–4) | Отрицательная |
| 23 | (1;2;3) | (–6;4;5) | Положительная |
| 24 | (–2;5;1) | (3;2;–7) | Отрицательная |
| 25 | (–5;3;–1) | (–4;3;–1) | Положительная |
| 26 | (4;–3;2) | (3;1;2) | Отрицательная |
| 27 | (3;–5;6) | (2;3;4) | Положительная |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 28 | (9;5;3) | (–3;2;1) | Отрицательная |
| 29 | (–4;–2;7) | (7;2;1) | Положительная |
| 30 | (5;1;2) | (–2;1;–3) | Отрицательная |

**Пример**. *Для векторов **a**(1;–2;3) и **b**(0;1;4) подобрать: вектор **c**, коллинеарный вектору **a** и сонаправленный с ним; вектор **n**, ортогональный вектору **a**; вектор **e** так, чтобы векторы **a, b, e** были компланарны; вектор **d** так, чтобы тройка (**a,b,d**) была базисом с положительной ориентацией.*

**Решение**.

1) Обозначим координаты вектора ***c*** через ($x$;$y$;$z$). Для коллинеарности и сонаправленности векторов ***a*** и ***c*** нужно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}=t>0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=3t \\ t>0 \end{cases}.$$

В качестве $t$ можно выбрать любое положительное значение, например, $t$ = 2. Тогда $x$ = 2, $y$ = –4, $z$ = 6. Итак, вектор ***c*** имеет координаты (2;–4;6).

2) Обозначим координаты вектора ***n*** через ($x$;$y$;$z$). Для ортогональности ненулевых векторов ***a*** и ***n*** нужно, чтобы их скалярное произведение было равно 0: ***a***·***n*** = 0, то есть $1\cdot x+(-2)\cdot y+3\cdot z = 0$.

Выберем произвольно любые две (не равные одновременно нулю) координаты вектора ***n***: например, $x$ = 6, $y$ = –3. Тогда получим уравнение относительно координаты $z$: $1\cdot 6 + (-2)\cdot(-3) + 3\cdot z = 0$. Решая это уравнение, найдем: $z$ = –4. Итак, вектор ***n*** имеет координаты (6;–3;–4).

3) Обозначим координаты вектора ***e*** через ($x$;$y$;$z$). Для компланарности векторов ***a, b, e*** нужно, чтобы их смешанное произведение было равно 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0, \quad x \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-11x - 4y + z = 0.$$

Выберем произвольно любые две координаты вектора ***e***: например, $x = 1$, $y = –3$. Тогда получим уравнение относительно координаты $z$: $–11·1–4·(–3)+z = 0$. Решая это уравнение, найдем: $z = –1$.

Итак, вектор ***e*** имеет координаты (1;–3;–1).

4) Обозначим координаты вектора ***d*** через ($x$;$y$;$z$). Для того, чтобы упорядоченная тройка (***a,b,d***) была базисом с положительной ориентацией, нужно, чтобы их смешанное произведение было положительно:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ x & y & z \end{vmatrix} > 0, \quad x \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

$$-11x - 4y + z > 0.$$

Вновь выберем произвольно любые две координаты вектора ***d***: например, $x = 1$, $y = –3$. Тогда получим неравенство относительно координаты $z$: $–11·1 – 4·(–3) + z > 0$. Решая его, найдем: $z > –1$. Возьмем, например, $z = 5$.

Итак, вектор ***d*** имеет координаты (1;–3;5).

**Ответ**: ***c***(2;–4;6); ***n***(6;–3;–4); ***e***(1;–3;–1); ***d***(1;– 3;5).

# Тема 2. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

**Задания.**

*1) Докажите, что точки A, B, C не лежат на одной прямой.*

*2) Составьте уравнение прямой, содержащей указанную сторону треугольника ABC.*

*3) Составьте уравнение прямой, проходящей через указанную вершину треугольника ABC параллельно его противолежащей стороне.*

*4) Определите взаимное расположение прямой $M_1M_2$ и прямой m.*

*5) Запишите уравнения каких-либо прямых l и n, не проходящих ни через одну вершину треугольника ABC, если $l \parallel M_1M_2$, $n \perp M_1M_2$.*

*6) Определите расстояние от центра масс треугольника ABC до прямой, содержащей указанную сторону треугольника.*

*7) Найдите отношение периметра треугольника ABC к его площади.*

*8) Определите вид треугольника ABC(остроугольный, тупоугольный, прямоугольный; равносторонний, равнобедренный, разносторонний).*

*9) Изобразите треугольник ABC и все найденные элементы на чертеже.*

ВАРИАНТЫ УСЛОВИЙ К ЗАДАНИЯМ

| Номер варианта | 1)-9) | 2), 6) | 3) | 4), 5) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A(–5;2), B(5;7), C(1;–1) | AB | C | $M_1(1;2)$, $M_2(5;4)$, *m* содержит высоту, проведенную из вершины B. |
| 2 | A(–2;10), B(13;5), C(1;1) | BC | A | $M_1(5;5)$, $M_2(11;7)$, *m* содержит биссектрису, проведенную из вершины C. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | A(3;–1),<br>B(–7;–6),<br>C(–3;2) | AC | B | $M_1$(–3;–1), $M_2$(–7;–3),<br>*m* содержит медиану, проведенную из вершины A. |
| 4 | A(3;–9),<br>B(–12;–4),<br>C(0;0) | AB | C | $M_1$(–4;–4), $M_2$(–10;–6),<br>*m* содержит высоту, проведенную из вершины B. |
| 5 | A(–12;9),<br>B(12;16),<br>C(0;0) | BC | A | $M_1$(10;–3), $M_2$(–2;6),<br>*m* содержит биссектрису, проведенную из вершины C. |
| 6 | A(–7;4),<br>B(3;9),<br>C(–1;1) | AC | B | $M_1$(–1;4), $M_2$(3;6),<br>*m* содержит медиану, проведенную из вершины A |
| 7 | A(–4;10),<br>B(11;5),<br>C(–1;1) | AB | C | $M_1$(3;5), $M_2$(9;7),<br>*m* содержит высоту, проведенную из вершины B. |
| 8 | A(–1;–4),<br>B(–11;–9),<br>C(–7;–1) | BC | A | $M_1$(–7;–4), $M_2$(–11;–6),<br>*m* содержит биссектрису, проведенную из вершины C. |
| 9 | A(3;3),<br>B(–12;2),<br>C(0;6) | AC | B | $M_1$(–4;2), $M_2$(–10;0),<br>*m* содержит медиану, проведенную из вершины A |
| 10 | A(–11;8),<br>B(13;15),<br>C(1;–1) | AB | C | $M_1$(11;–4), $M_2$(–1;5),<br>*m* содержит высоту, проведенную из вершины B. |
| 11 | A(–4;2),<br>B(6;7),<br>C(2;–1) | BC | A | $M_1$(2;2), $M_2$(6;4),<br>*m* содержит биссектрису, проведенную из вершины C. |
| 12 | A(–2;8),<br>B(13;3),<br>C(1;–1) | AC | B | $M_1$(5;3), $M_2$(11;5),<br>*m* содержит медиану, проведенную из вершины A. |
| 13 | A(9;–5),<br>B(–1;–10),<br>C(3;–2) | AB | C | $M_1$(3;–5), $M_2$(–1;–7),<br>*m* содержит высоту, проведенную из вершины B. |
| 14 | A(–2;–8),<br>B(–17;–3),<br>C(–5;1) | BC | A | $M_1$(–9;–3), $M_2$(–15;–5),<br>*m* содержит биссектрису, проведенную из вершины C. |
| 15 | A(–13;10),<br>B(11;17),<br>C(–1;1) | AC | B | $M_1$(9;–2), $M_2$(–3;7),<br>*m* содержит медиану, проведенную из вершины A |
| 16 | A(1;8), | AB | C | $M_1$(7;8), $M_2$(11;10), |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | B(11;13), C(7;5) | | | $m$ содержит высоту, проведенную из вершины В. |
| 17 | A(–1;9), B(14;4), C(2;0) | BC | A | $M_1(6;4)$, $M_2(12;6)$, $m$ содержит биссектрису, проведенную из вершины С. |
| 18 | A(0;–3), B(–10;–8), C(–6;0) | AC | B | $M_1(-6;-3)$, $M_2(-10;-5)$, $m$ содержит медиану, проведенную из вершины А |
| 19 | A(–1;–7), B(–16;–2), C(–4;2) | AB | C | $M_1(-8;-2)$, $M_2(-14;-4)$, $m$ содержит высоту, проведенную из вершины В. |
| 20 | A(–10;8), B(14;15), C(2;–1) | BC | A | $M_1(12;-4)$, $M_2(0;5)$, $m$ содержит биссектрису, проведенную из вершины С. |
| 21 | A(–8;6), B(2;11), C(–2;3) | AC | B | $M_1(-2;6)$, $M_2(2;8)$, $m$ содержит медиану, проведенную из вершины А |
| 22 | A(–3;11), B(12;6), C(0;2) | AB | C | $M_1(4;6)$, $M_2(10;8)$, $m$ содержит высоту, проведенную из вершины В. |
| 23 | A(6;–7), B(–4;–12), C(0;–4) | BC | A | $M_1(0;-7)$, $M_2(-4;-9)$, $m$ содержит биссектрису, проведенную из вершины С. |
| 24 | A(0;–6), B(–15;–1), C(–3;–3) | AC | B | $M_1(-7;-1)$, $M_2(-13;-3)$, $m$ содержит медиану, проведенную из вершины А. |
| 25 | A(–5;14), B(19;21), C(7;5) | AB | C | $M_1(17;2)$, $M_2(5;11)$, $m$ содержит высоту, проведенную из вершины В. |
| 26 | A(–6;7), B(4;12), C(0;4) | BC | A | $M_1(0;7)$, $M_2(4;9)$, $m$ содержит биссектрису, проведенную из вершины С. |
| 27 | A(0;6), B(15;1), C(3;–3) | AC | B | $M_1(7;1)$, $M_2(13;3)$, $m$ содержит медиану, проведенную из вершины А. |
| 28 | A(8;–6), B(–2;–11), C(2;–3) | AB | C | $M_1(2;-6)$, $M_2(-2;-8)$, $m$ содержит высоту, проведенную из вершины В. |
| 29 | A(3;–11), B(–12;–6), | BC | A | $M_1$ $(-4;-6)$, $M_2(-10;-8)$, $m$ содержит биссектрису, |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | C(0;–2) | | | проведенную из вершины C. |
| 30 | A(–14;12),<br>B(10;19),<br>C(–2;3) | AC | B | $M_1(8;0)$, $M_2(-4;9)$,<br>$m$ содержит медиану, проведенную из вершины A. |

**<u>Пример</u>.**

*1) Докажите, что точки A(1;1), B(8;–2), C(5;–3) не лежат на одной прямой.*

*2) Составьте уравнение прямой, содержащей сторону AB треугольника ABC.*

*3) Составьте уравнение прямой, проходящей через вершину B треугольника ABC параллельно противолежащей его стороне.*

*4) Определите взаимное расположение прямой $M_1M_2$ , где $M_1(-3,-4)$, $M_2(-1,6)$, и каждой из прямых $m_1$, $m_2$ и $m_3$, если:*

*$m_1$ содержит высоту, проведенную из вершины A;*

*$m_2$ содержит медиану, проведенную из вершины C;*

*$m_3$ содержит биссектрису, проведенную из вершины B.*

*5) Запишите уравнения каких-либо прямых a и b, не проходящих ни через одну вершину треугольника ABC, если $a \parallel M_1M_2$, $b \perp M_1M_2$.*

*6) Определите расстояние от центра масс треугольника ABC до прямой, содержащей его сторону AB.*

*7) Найдите отношение периметра треугольника ABC к его площади.*

*8) Определите вид треугольника ABC (остроугольный, тупоугольный, прямоугольный, равносторонний, равнобедренный, разносторонний).*

*9) Изобразите треугольник ABC и все найденные элементы на чертеже.*

**<u>Решение</u>.** 1) Даны точки $A(1;1)$, $B(8;-2)$, $C(5;-3)$. Эти точки лежат на одной прямой, если коллинеарны векторы с началом в одной из них и с концами в двух других.

Найдем, например, координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\overline{AB}$ =(8–1;–2–1)=(7;–3), $\overline{AC}$ =(5–1;–3–1)=(4;–4). Проверим условие коллинеарности этих векторов: $\frac{7}{4} \neq \frac{-3}{-4}$ – значит, $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ неколлинеарны, то есть точки $A(1;1)$, $B(8;–2)$ и $C(5;–3)$ не лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

2) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точки ($x_1$;$y_1$) и ($x_2$;$y_2$): $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Пусть ($x_1$;$y_1$) – координаты точки $A$: $x_1$=1, $y_1$=1; ($x_2$;$y_2$) – координаты точки $B$: $x_2$=8, $y_2$=–2. Тогда получим:

$$\frac{x-1}{8-1}=\frac{y-1}{-2-1}, \quad \frac{x-1}{7}=\frac{y-1}{-3}, \quad -3(x-1)-7(y-1)=0,$$

$$3x+7y-10=0.$$

**Ответ**: уравнение прямой $l$, содержащей сторону AB, имеет вид: $3x + 7y - 10 = 0$.

3) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку ($x_o$; $y_o$) и имеющей направляющий вектор с координатами ($a_1$; $a_2$): $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}$. В нашем случае направляющий вектор $\overline{AC}$ (4;–4), точка прямой B(8;–2). Следовательно, получаем уравнение:

$$\frac{x-8}{4}=\frac{y-(-2)}{-4} \Leftrightarrow (x-8)=-(y+2) \Leftrightarrow x+y-6=0.$$

**Ответ**: уравнение прямой, проходящей через вершину B параллельно стороне AC, имеет вид $x + y - 6 = 0$.

4) Найдем сначала уравнения прямых $M_1M_2$, $m_1$, $m_2$, $m_3$.

Составим уравнение прямой $M_1M_2$, проходящей через точки $M_1(-3;-4)$ и $M_2(-1;6)$:

$$\frac{x-(-3)}{(-1)-(-3)}=\frac{y-(-4)}{6-(-4)}, \quad \frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{10}, \quad 5(x+3)-(y+4)=0,$$

$5x-y+11=0$. Итак, уравнение прямой $M_1M_2$ имеет вид: $5x-y+11=0$.

Составим уравнение прямой $m_1$, содержащей высоту, проведенную из вершины $A$. Для этого воспользуемся уравнением $n_1(x-x_o)+n_2(y-y_o)=0$, где $(n_1;n_2)$ – координаты вектора нормали, $(x_o;y_o)$ – координаты точки искомой прямой. По условию $m_1 \perp BC$, следовательно, вектор $\overline{BC}$ с координатами $(5-8;-3-(-2))=(-3;-1)$ является вектором нормали для прямой $m_1$. Прямая проходит через точку $A(1;1)$, поэтому получаем уравнение: $(-3)(x-1)+(-1)(y-1)=0$, то есть $3x+y-4=0$. Итак, уравнение прямой $m_1$ имеет вид $3x+y-4=0$.

Составим уравнение прямой $m_2$, содержащей медиану, проведенную из вершины $C$. Для этого воспользуемся уравнением $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$ – координаты точек искомой прямой. Координаты одной из этих точек известны: $C(5;-3)$. Координаты другой точки можно определить: так как $m_2$ содержит медиану треугольника, то $m_2$ проходит через середину $N$ стороны $AB$. Тогда, используя формулы координат середины отрезка $AB$, получим: $x_N=\frac{1+8}{2}=\frac{9}{2}$, $y_N=\frac{1+(-2)}{2}=-\frac{1}{2}$. Запишем уравнение прямой $m_2$, проходящей через точки $C(5;-3)$ и $N\left(\frac{9}{2};-\frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{x-5}{\frac{9}{2}-5}=\frac{y-(-3)}{-\frac{1}{2}-(-3)}, \quad \frac{x-5}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-(-3)}{\frac{5}{2}}, \quad 5(x-5)+(y+3)=0,$$

$5x+y-22=0$. Итак, уравнение прямой $m_2$ имеет вид $5x + y – 22 = 0$.

Составим уравнение прямой $m_3$, содержащей биссектрису, проведенную из вершины $A$. Воспользуемся уравнением $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}$, где $(a_1;a_2)$ – координаты направляющего вектора, $(x_o;y_o)$ – координаты точки искомой прямой. По условию $A(1;1)\in m_3$. Выберем в качестве направляющего вектора прямой $m_3$ вектор $\overline{AL}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, где $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ – единичные векторы, сонаправленные соответственно векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (вектор $\overline{AL}$ проходит по диагонали ромба, стороны которого проходят по сторонам $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$, а значит – по биссектрисе угла $A$). Так как $\overline{AB}=(7;–3)$, то $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{7^2+(-3)^2}=\sqrt{58}$, значит,

$\boldsymbol{e}_1=\left(\frac{7}{\sqrt{58}},-\frac{3}{\sqrt{58}}\right)$. Так как $\overline{AC}=(4;–4)$, то

$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, значит, $\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Тогда $\overline{AL}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{7}{\sqrt{58}}+\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{58}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$

$=\left(\frac{7+\sqrt{29}}{\sqrt{58}},\frac{-3-\sqrt{29}}{\sqrt{58}}\right)$. Уравнение прямой $m_3$, проходящей через точку $A$ с направляющим вектором $\overline{AL}$, имеет вид:

$$\frac{x-1}{\frac{7+\sqrt{29}}{\sqrt{58}}}=\frac{y-1}{\frac{-3-\sqrt{29}}{\sqrt{58}}},\quad \frac{x-1}{7+\sqrt{29}}=\frac{y-1}{-3-\sqrt{29}},$$

$$\left(-3-\sqrt{29}\right)(x-1)-\left(7+\sqrt{29}\right)(y-1)=0,$$

$$\left(-3-\sqrt{29}\right)x-\left(7+\sqrt{29}\right)y+10+2\sqrt{29}=0.$$

Итак, уравнение прямой $m_3$ имеет вид:
$\left(-3-\sqrt{29}\right)x-\left(7+\sqrt{29}\right)y+10+2\sqrt{29}=0$.

Выясним теперь взаимное расположение прямой $M_1M_2$ с прямыми $m_1$, $m_2$, $m_3$:

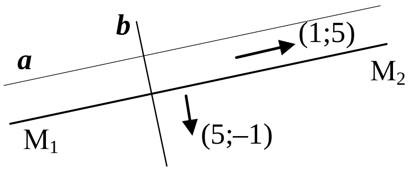
1) $M_1M_2$: $5x–y+11=0$; $m_1$: $3x+y–4=0$. Так как $\frac{5}{3}\neq\frac{-1}{3}$, то данные прямые пересекаются.

2) $M_1M_2$: $5x–y+11=0$; $m_2$: $5x+y–22=0$. Так как $\frac{5}{5}\neq\frac{-1}{1}$, то данные прямые пересекаются.

3) $M_1M_2$: $5x–y+11=0$; $m_3$: $\left(-3-\sqrt{29}\right)x-\left(7+\sqrt{29}\right)y+10+2\sqrt{29}=0$. Так как $\frac{5}{-3-\sqrt{29}}\neq\frac{-1}{-7-\sqrt{29}}$, то данные прямые пересекаются.

**Ответ**: прямая $M_1M_2$:пересекается с каждой из прямых $m_1$, $m_2$, и $m_3$.

5)Уравнение прямой $M_1M_2$: $5x–y+11=0$.



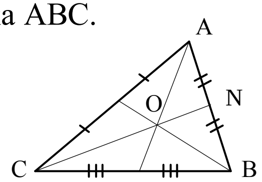

Так как прямая $a$ параллельна прямой $M_1M_2$, то ее уравнение имеет вид $5x–y+c_1=0$, причем $c_1\neq 11$. По условию $A(1;1)\notin a$, следовательно, $5\cdot 1–1+c_1\neq 0$, то есть $c_1\neq –4$; $B(8;–2)\notin a$, следовательно, $5\cdot 8–(–2)+c_1\neq 0$, то есть $c_1\neq –42$; $C(5;–3)\notin a$, следовательно, $5\cdot 5–(–3)+c_1\neq 0$, то есть $c_1\neq –28$. Итак, $c_1\in \mathbf{R}\backslash\{–42,–28,–4,11\}$. Следовательно, уравнение прямой $a$ может, например, иметь вид: $5x–y+3=0$.

Так как прямая $b$ перпендикулярна прямой $M_1M_2$, то ее уравнение имеет вид $(–1)x–5y+c_2=0$. По условию $A(1;1)\notin b$, следовательно, $(–1)\cdot 1–5\cdot 1+c_2\neq 0$, то есть $c_2\neq 6$;

$B(8;–2)\notin b$, следовательно,$(–1)\cdot8–5\cdot(–2)+c_2\neq0$, то есть $c_2\neq–2$;
$C(5;–3)\notin \boldsymbol{b}$, следовательно, $(–1)\cdot5–5\cdot(–3)+c_2\neq0$, то есть $c_2 \neq10$. Итак, $c_2\in\mathbf{R}\backslash\{–2,6,10\}$. Следовательно, уравнение прямой $b$ может, например, иметь вид: $–x–5y+7=0$, или $x+5y–7=0$.

**Ответ**: например, $5x–y+3=0$ (прямая $a$)
и $x+5y–7=0$ (прямая $b$).

6) Найдем координаты точки O – центра масс треугольника ABC.




Поскольку центр масс треугольника – это точка пересечения его медиан, а точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины, то CO:ON=2:1. Поэтому $x_O=\dfrac{x_C+2x_N}{3}$, $y_O=\dfrac{y_C+2y_N}{3}$, где $C(x_C;y_C)$, $O(x_O;\ y_O)$, $N(x_N;y_N)$. По условию задачи $C(5;–3)$; а координаты точки $N\left(\dfrac{9}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ были найдены в пункте (4). Значит,

$$x_O=\frac{5+2\cdot\dfrac{9}{2}}{3}=\frac{14}{3},\ y_O=\frac{(-3)+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{3}=-\frac{4}{3}.$$

Итак, $O\left(\dfrac{14}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$, а уравнение прямой AB: $3x+7y–10=0$.

Тогда расстояние $\rho(O,AB)$ от точки O до прямой AB можно найти по формуле:

$$\rho(O,AB)=\frac{\left|3\cdot\dfrac{14}{3}+7\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)-10\right|}{\sqrt{3^2+7^2}}=\frac{16}{3\cdot\sqrt{58}}=\frac{8\sqrt{58}}{87}.$$

**Ответ**: ρ(O,AB)= $\dfrac{8\sqrt{58}}{87}$ **.**

7) $P_{ABC}=\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{BC}\right|+\left|\overline{AC}\right|$, $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\rho(C,AB)\cdot\left|\overline{AB}\right|$.

$\overline{AB}$ (7;–3), значит, $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{7^2+(-3)^2}=\sqrt{58}$,

$\overline{AC}$ (4;–4), значит, $\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$**,**

$\overline{BC}$ (–3; –1), значит, $\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$**.**

Итак, $P_{ABC}=\sqrt{58}+4\sqrt{2}+\sqrt{10}$.

$$\rho(C,AB)=\frac{\left|3\cdot5+7\cdot(-3)-10\right|}{\sqrt{3^2+7^2}}=\frac{16}{\sqrt{58}}=\frac{8\sqrt{58}}{29}.$$

Значит, $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8\sqrt{58}}{29}\cdot\sqrt{58}=8$.

**Ответ**: $\dfrac{P_{ABC}}{S_{ABC}}=\dfrac{\sqrt{58}+4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{8}$.

8)Определим вид каждого из углов треугольника ABC.

$$\cos(\angle A)=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{7\cdot4+(-3)\cdot(-4)}{\sqrt{58}\cdot4\sqrt{2}}=\frac{40}{\sqrt{58}\cdot4\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{29}}>0;$$

значит, ∠A – острый.

$$\cos(\angle B)=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|}=\frac{(-7)\cdot(-3)+3\cdot(-1)}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{10}}=\frac{18}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{10}}=\frac{9}{\sqrt{145}}>0;$$

значит, ∠B – острый.

$$\cos(\angle C)=\frac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{\left|\overline{CA}\right|\cdot\left|\overline{CB}\right|}=\frac{(-4)\cdot3+4\cdot1}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{-8}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{-1}{\sqrt{5}}<0;$$

значит, ∠C – тупой.

Следовательно, треугольник ABC – тупоугольный.

Так как AB≠BC, AB≠AC, BC≠AC (см. (7)), то треугольник ABC – разносторонний.

**Ответ**: треугольник ABC – тупоугольный разносторонний.

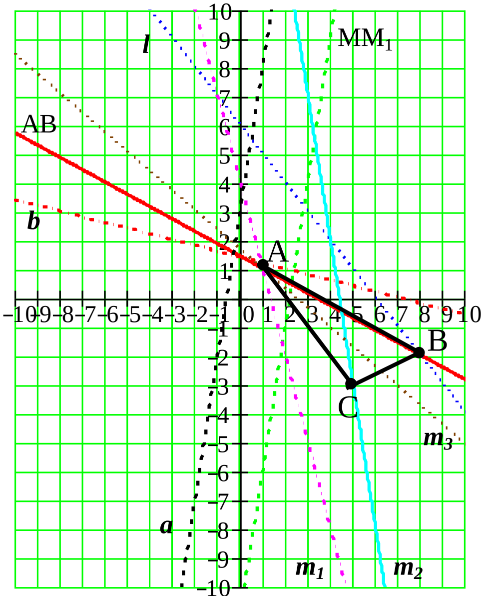
9) Выпишем все уравнения прямых, найденные при решении задачи, и построим эти прямые в системе координат.

AB: $3x+7y-10=0$, $l$: $x+y-6=0$,

$MM_1$: $5x-y+11=0$, $m_1$: $3x+y-4=0$,

$m_2$: $5x+y-22=0$, $m_3$: $\left(-3-\sqrt{29}\right)x-\left(7+\sqrt{29}\right)y+10+2\sqrt{29}=0$,

$a$: $5x-y+3=0$, $b$: $x+5y-7=0$.



# Тема 3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Задание 1**. *Постройте кривые второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат. Найдите:*

*для окружности координаты центра и радиус;*

*для эллипса координаты фокусов и уравнения директрис;*

*для гиперболы координаты фокусов, уравнения директрис и асимптот;*

*для параболы координаты фокуса и уравнение директрисы.*

*Изобразите фокусы, директрисы и асимптоты на чертеже.*

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 1

| вариант | Кривые второго порядка | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **1** | $(x-2)^2+(y-3)^2 = 9$ | $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ | $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$ | $y^2=8x$ | $x^2-9y^2=0$ |
| **2** | $(x+3)^2+(y-5)^2 = 4$ | $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$ | $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$ | $x^2=-6y$ | $y^2 = 9$ |
| **3** | $(x+1)^2+(y-2)^2=16$ | $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ | $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ | $y^2=-8x$ | $9x^2 = 0$ |
| **4** | $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ | $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ | $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{25}=1$ | $x^2 = 6y$ | $y^2-9x^2= 0$ |
| **5** | $(x+3)^2+(y+3)^2 = 4$ | $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$ | $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$ | $y^2=-2x$ | $x^2 = 9$ |
| **6** | $(x-1)^2+(y+1)^2=16$ | $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ | $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$ | $x^2 = 4y$ | $9y^2 = 0$ |
| **7** | $(x+2)^2+(y-1)^2=36$ | $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ | $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ | $y^2 = 2x$ | $x^2-4y^2= 0$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **8** | $(x-4)^2+(y+2)^2=49$ | $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ | $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$ | $x^2=-4y$ | $y^2=4$ |
| **9** | $(x+4)^2+(y-4)^2=9$ | $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ | $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$ | $y^2=10x$ | $4x^2=0$ |
| **10** | $(x-5)^2+(y+1)^2=4$ | $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ | $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{9}=1$ | $x^2=-12y$ | $y^2-4x^2=0$ |
| **11** | $(x+5)^2+(y-6)^2=16$ | $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ | $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ | $y^2=-10x$ | $x^2=4$ |
| **12** | $(x-1)^2+(y+5)^2=1$ | $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ | $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$ | $x^2=12y$ | $4y^2=0$ |
| **13** | $(x+1)^2+(y-3)^2=25$ | $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$ | $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1$ | $y^2=-6x$ | $x^2-16y^2=0$ |
| **14** | $(x-3)^2+(y-2)^2=36$ | $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$ | $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{4}=1$ | $x^2=-8y$ | $y^2=16$ |
| **15** | $(x+2)^2+(y+4)^2=49$ | $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$ | $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ | $y^2=6x$ | $16x^2=0$ |
| **16** | $(x-3)^2+(y-2)^2=9$ | $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ | $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{16}=1$ | $x^2=8y$ | $y^2-16x^2=0$ |
| **17** | $(x-5)^2+(y+3)^2=4$ | $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$ | $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ | $y^2=4x$ | $x^2=16$ |
| **18** | $(x+1)^2+(y+1)^2=16$ | $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$ | $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ | $x^2=-2y$ | $16y^2=0$ |
| **19** | $(x+4)^2+(y-3)^2=25$ | $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ | $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1$ | $y^2=-4x$ | $x^2-25y^2=0$ |
| **20** | $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ | $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1$ | $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{36}=1$ | $x^2=2y$ | $y^2=25$ |
| **21** | $(x+1)^2+(y-1)^2=16$ | $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ | $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ | $y^2=12x$ | $25x^2=0$ |
| **22** | $(x-1)^2+(y+2)^2=36$ | $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ | $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ | $x^2=-10y$ | $y^2-25x^2=0$ |
| **23** | $(x+2)^2+(y-4)^2=49$ | $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$ | $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ | $y^2=-12x$ | $x^2=25$ |
| **24** | $(x-4)^2+(y+4)^2=9$ | $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$ | $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1$ | $x^2=10y$ | $25y^2=0$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **25** | $(x+1)^2+(y-5)^2=4$ | $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ | $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{49}=1$ | $y^2=14x$ | $x^2-36y^2=0$ |
| **26** | $(x-6)^2+(y+5)^2=16$ | $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$ | $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{36}=1$ | $x^2=-16y$ | $y^2=36$ |
| **27** | $(x-3)^2+(y+1)^2=25$ | $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$ | $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{49}=1$ | $y^2=-14x$ | $36x^2=0$ |
| **28** | $(x-2)^2+(y-3)^2=36$ | $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$ | $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=1$ | $x^2=16y$ | $y^2-36x^2=0$ |
| **29** | $(x+4)^2+(y+2)^2=49$ | $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{64}=1$ | $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ | $y^2=-16x$ | $x^2=36$ |
| **30** | $(x+5)^2+(y-1)^2=1$ | $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ | $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{25}=1$ | $x^2=14y$ | $36y^2=0$ |

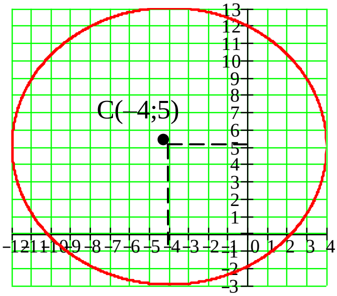
**Пример**. *Постройте кривые второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат:*

$(x+4)^2+(y-5)^2=64$; $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{64}=1$; $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; $x^2=-18y$; $9x^2-4y^2=0$.

*Найдите: для окружности координаты центра и радиус; для эллипса координаты фокусов и уравнения директрис; для гиперболы координаты фокусов, уравнения директрис и асимптот; для параболы координаты фокуса и уравнение директрисы. Изобразите фокусы, директрисы и асимптоты на чертеже.*

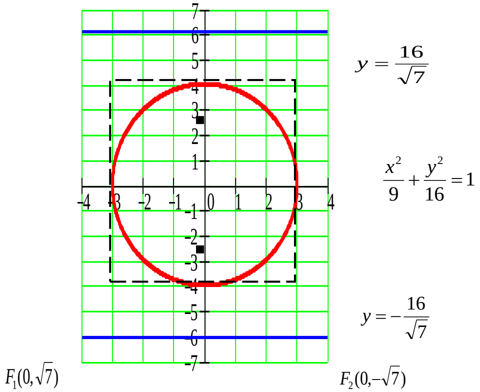
**Решение**.

1) $(x+4)^2+(y-5)^2=64$ – уравнение окружности с центром в точке C(–4;5) и радиусом $r=\sqrt{64}=8$.



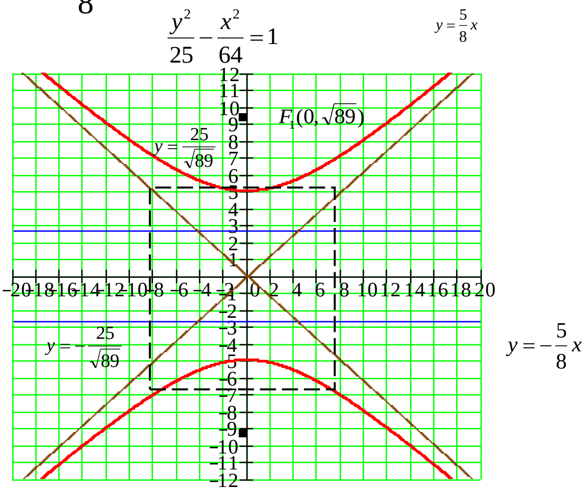
2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ – уравнение эллипса; $a=\sqrt{9}=3$; $b=\sqrt{16}=4$. Поскольку $a < b$, то фокусы эллипса лежат на оси $Oy$ и имеют координаты $F_1(0;c)$ и $F_2(0;–c)$, где $c^2=a^2–b^2$, то есть $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$. Значит, координаты фокусов $F_1(0;\sqrt{7})$; $F_2(0;-\sqrt{7})$.

Найдем уравнения директрис эллипса: $y=\pm\frac{b^2}{c}$, то есть $y=\pm\frac{4^2}{\sqrt{7}}=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$.

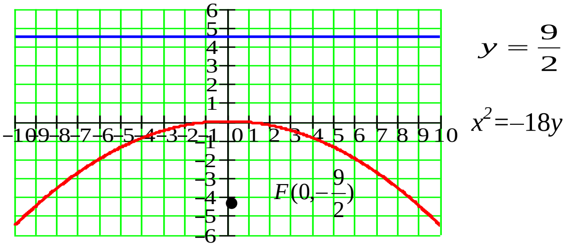



3) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{64}=1$ – уравнение гиперболы с вершинами на оси $Oy$; $a=\sqrt{64}=8$; $b=\sqrt{25}=5$. Найдем координаты фокусов $F_1(0;c)$ и $F_2(0;–c)$, где $c^2=a^2+b^2$, то есть $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{64+25}=\sqrt{89}$. Значит, координаты фокусов: $F_1(0;\sqrt{89})$; $F_2(0;-\sqrt{89})$. Найдем уравнения директрис гиперболы: $y=\pm\frac{b^2}{c}$, то есть $y=\pm\frac{5^2}{\sqrt{89}}=\pm\frac{25}{\sqrt{89}}$. Найдем

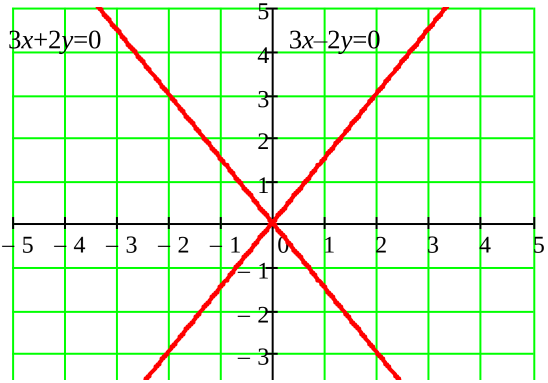
уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm \frac{a}{b} x$, *то есть* $y = \pm \frac{5}{8} x$.




4) $x^2=-18y$ – уравнение параболы, симметричной относительно оси $Oy$. Найдем координаты фокуса $F$ $(0;c)$: $c = \frac{\frac{-18}{2}}{2} = -\frac{9}{2}$ , то есть $F$ $(0; -\frac{9}{2})$. Найдем уравнение директрисы параболы: $y = -\frac{-\frac{18}{2}}{2} = \frac{9}{2}$.




5) $9x^2–4y^2=0$, значит, $(3x–2y)(3x+2y)=0$, значит, $3x–2y=0$ или $3x+2y=0$. Эта совокупность уравнений задает пару пересекающихся прямых.




**<u>Задание 2</u>.** *Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и постройте ее в исходной системе координат.*

<u>ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 2</u>

| Вариант | Кривая второго порядка |
|---|---|
| **1** | $9y^2 – 4x^2 + 18y – 8x – 31 = 0$ |
| **2** | $x^2 + 2y – 4x + 6= 0$ |
| **3** | $4y^2 + 9x^2 + 36x = 0$ |
| **4** | $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ |
| **5** | $x^2 – 2x – 9y + 1 = 0$ |

| | |
|---|---|
| **6** | $x^2 - 4x - 5 = 0$ |
| **7** | $y^2 + 6y + 9 = 0$ |
| **8** | $4y^2 - 25x^2 + 8y - 96 = 0$ |
| **9** | $y^2 + 4x^2 - 2y - 8x + 1 = 0$ |
| **10** | $y^2 + 2y - 3 = 0$ |
| **11** | $x^2 - 10x + 25 = 0$ |
| **12** | $x^2 + 2x - 3y + 7 = 0$ |
| **13** | $9x^2 - 4y^2 - 36x + 16y - 16 = 0$ |
| **14** | $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ |
| **15** | $x^2 - 8x + 16 = 0$ |
| **16** | $9y^2 + x^2 - 2x - 8 = 0$ |
| **17** | $x^2 - 12x + 20 = 0$ |
| **18** | $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 = 0$ |
| **19** | $y^2 + 8y + 15 = 0$ |
| **20** | $y^2 - 9x^2 + 6y + 36x - 27 = 0$ |
| **21** | $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0$ |
| **22** | $y^2 + 2y - 4x - 10 = 0$ |
| **23** | $y^2 - 4y + x + 8 = 0$ |
| **24** | $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$ |
| **25** | $x^2 - 10x + 25 = 0$ |
| **26** | $4y^2 - 9x^2 + 8y - 18x - 5 = 0$ |
| **27** | $16x^2 - 25y^2 + 64x - 50y - 361 = 0$ |
| **28** | $4y^2 - x^2 + 8y - 2x + 3 = 0$ |
| **29** | $y^2 + 6y + x + 9 = 0$ |
| **30** | $x^2 - y^2 + 8y - 16 = 0$ |

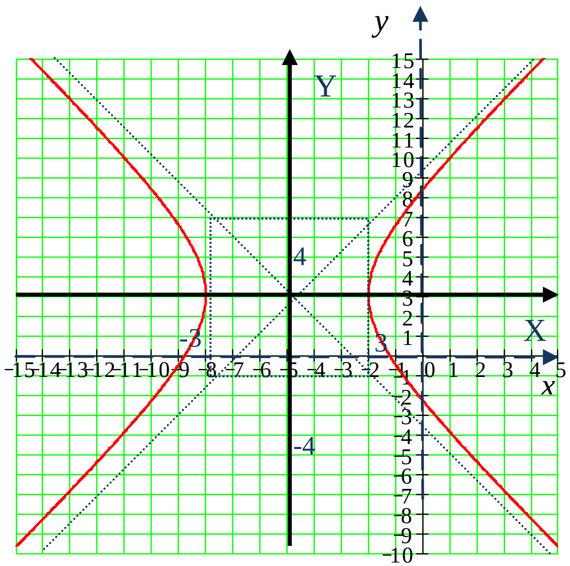
**Пример**. *Приведите уравнение кривой второго порядка* $16x^2 - 9y^2 + 160x + 54y + 175 = 0$ *к каноническому виду и постройте ее в исходной системе координат.*

**Решение**. Для приведения уравнения к каноническому виду выделим полные квадраты относительно каждой переменной, используя формулы: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2a \cdot b + b^2$ .

$$(16x^2+160x)-(9y^2-54y)+175=16(x^2+10x)-9(y^2-6y)+175=$$
$$=16(x^2+2\cdot 5x)-9(y^2-2\cdot 3y)+175=16(x^2+2\cdot 5x+5^2-5^2)-9(y^2-$$
$$-2\cdot 3y+3^2-3^2)+175=16(x^2+2\cdot 5x+5^2)-16\cdot 5^2-9(y^2-2\cdot 3y+3^2)+$$
$$+9\cdot 3^2+175=16(x+5)^2-9(y-3)^2-144.$$

Получаем уравнение: $16(x+5)^2-9(y-3)^2-144=0$. Отсюда $16(x+5)^2-9(y-3)^2=144$, то есть $\frac{16\cdot(x+5)^2}{144}-\frac{9\cdot(y-3)^2}{144}=1$, или $\frac{(x+5)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1$.

Введем обозначения: $X=x+5$, $Y=y-3$. Тогда уравнение примет вид $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{16}=1$ – каноническое уравнение гиперболы. Выполним построение.




Сначала построим в системе координат $XOY$ гиперболу, заданную уравнением $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{16}=1$. Затем выполним параллельный перенос: $X=x+5$, $Y=y-3$, то есть сместим систему координат вдоль оси $OX$ вправо на 5 единиц и вдоль оси $OY$ вниз на 3 единицы.

**Задание 3.** *Постройте данные области в прямоугольной системе координат.*

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 3

| Вариант | Задание области |
|---|---|
| **1** | $\begin{cases} x^2 \le (y+1); \\ 5x + 2y - 10 \le 0; \\ y \ge 1 \end{cases}$ |
| **2** | $\begin{cases} \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} \ge 1; \\ 2x + 3y - 12 \le 0; \\ 2x - 3y + 12 \ge 0 \end{cases}$ |
| **3** | $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \ge 1; \\ x^2 \le y; \\ 5x - 3y + 15 \ge 0 \end{cases}$ |
| **4** | $\begin{cases} x^2 \ge -y; \\ (x-4)^2 \le -y; \\ y \le 0 \end{cases}$ |
| **5** | $\begin{cases} y \ge \dfrac{1}{x}; \\ x - y \ge 0; \\ x \le 4 \end{cases}$ |
| **6** | $\begin{cases} (y-1)^2 \le x; \\ (x-4)^2 + (y+4)^2 \ge 16; \\ x \le 4 \end{cases}$ |
| **7** | $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \ge 1; \\ x^2 - y^2 \ge 1; \\ x + 5 \ge 0 \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| **8** | $\begin{cases}(x-2)^2+y^2\geq 4;\\ y^2\leq -(x-2);\\ x\geq -2\end{cases}$ |
| **9** | $\begin{cases}y^2-\dfrac{x^2}{4}\leq 1;\\ x-3y-9\leq 0;\\ y\leq -1\end{cases}$ |
| **10** | $\begin{cases}y^2\leq -(x-2);\\ (x-2)^2\leq y;\\ x-1\geq 0\end{cases}$ |
| **11** | $\begin{cases}x^2\geq -(y-4);\\ 2x-y-4\leq 0;\\ y-4\leq 0\end{cases}$ |
| **12** | $\begin{cases}y\geq -\dfrac{1}{x};\\ x-2\geq 0;\\ 3x+4y\leq 12\end{cases}$ |
| **13** | $\begin{cases}(y+2)^2\geq -x;\\ x\leq 0;\\ y-2\leq 0\end{cases}$ |
| **14** | $\begin{cases}x^2\geq -(y-2);\\ x^2\leq y+2;\\ y-4\leq 0\end{cases}$ |
| **15** | $\begin{cases}(x-5)^2+(y-2)^2\geq 1;\\ (y-5)^2\geq (x-5)^2;\\ y\geq 0\end{cases}$ |
| **16** | $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}\leq 1;\\ \dfrac{x^2}{4}-y^2\leq 1;\\ y^2-\dfrac{x^2}{4}\leq 1.\end{cases}$ |

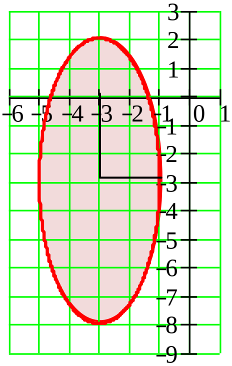
| | |
|---|---|
| **17** | $\begin{cases} y \geq \frac{1}{x}; \\ x - 5 \leq 0; \\ y - 4 \leq 0 \end{cases}$ |
| **18** | $\begin{cases} (x + 3)^2 \leq -(y - 2); \\ 7x + 3y + 21 \leq 0; \\ 7x - 3y - 21 \leq 0 \end{cases}$ |
| **19** | $\begin{cases} (y - 6)^2 \geq x; \\ y^2 \geq x; \\ x \geq 0 \end{cases}$ |
| **20** | $\begin{cases} (y - 1)^2 \geq x + 1; \\ x + 1 \geq 0; \\ 4x + 3y - 11 \leq 0 \end{cases}$ |
| **21** | $\begin{cases} (y - 1)^2 \leq -(x - 4); \\ y^2 \geq x; \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$ |
| **22** | $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \geq 1; \\ (x - 4)^2 + y^2 \geq 1; \\ x - 6 \leq 0. \end{cases}$ |
| **23** | $\begin{cases} \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} \leq 1; \\ (x - 1)^2 + y^2 \geq 1; \\ x \geq 0. \end{cases}$ |
| **24** | $\begin{cases} y^2 \geq -(x + 1); \\ \mathrm{y}^2 \leq x + 3; \\ x - 2 \leq 0 \end{cases}$ |
| **25** | $\begin{cases} x^2 \geq y; \\ x^2 + (y - 3)^2 \geq 1; \\ y - 3{,}5 \leq 0. \end{cases}$ |
| **26** | $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4; \\ x^2 + (y - 6)^2 \geq 4; \\ x^2 \leq 4. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| **27** | $\begin{cases} (x-2)^2 \geq y-2; \\ (x-2)^2 \geq y+2; \\ (x-2)^2 \leq 4. \end{cases}$ |
| **28** | $\begin{cases} y^2 \geq x+4; \\ x-3y+6 \geq 0; \\ x+3y+6 \geq 0 \end{cases}$ |
| **29** | $\begin{cases} y \geq \frac{1}{x}; \\ x^2 \leq y-3; \\ y-5 \leq 0. \end{cases}$ |
| **30** | $\begin{cases} \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} \leq 1; \\ x^2 \leq 9; \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1; \end{cases}$ |

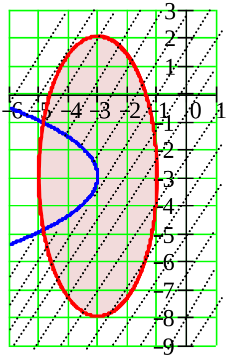
**Пример**. *Постройте в прямоугольной системе координат область*

$$\begin{cases} \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} \leq 1; \\ -2(x+3) \leq (y+3)^2; \\ x-2y \geq 4. \end{cases}$$

**Решение**. Неравенство $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} \leq 1$ задает область на плоскости, а уравнение $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$ – ее границу, которая является эллипсом. Построим его в прямоугольной системе координат. Для этого сдвинем эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ вдоль осей координат: по $Ox$ на 3 единицы влево и по $Oy$ на 3 единицы вниз. Эллипс разделил координатную плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Для определения нужной области выберем произвольную точку, не лежащую на границе области, и подставим ее координаты в неравенство. Если координаты выбранной точки удовлетворяют неравенству, то закрашиваем область, которой принадлежит выбранная точка, иначе – область, которой эта точка не принадлежит. Например, выберем точку М(0,0). Проверим, что она не принадлежит границе области: $\frac{(0+3)^2}{4}+\frac{(0+3)^2}{25}\neq 1$, значит, М(0;0) не принадлежит эллипсу. Теперь подставим ее координаты в неравенство $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{25}\le 1$: $\frac{(0+3)^2}{4}+\frac{(0+3)^2}{25}\le 1$, $\frac{9}{4}+\frac{9}{25}\le 1$, $\frac{9(25+4)}{100}=\frac{261}{100}\le 1$. Последнее неравенство неверно. Значит, выбираем ту часть плоскости, которой точка М не принадлежит, то есть внутреннюю область эллипса.



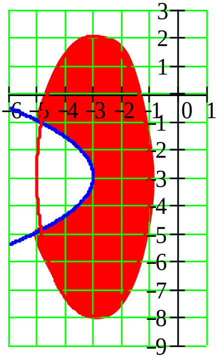

Неравенство $-2(x+3)\le(y+3)^2$ также задает область на плоскости, а уравнение $-2(x+3)=(y+3)^2$ – ее границу, которая является параболой. Построим ее в прямоугольной системе координат. Для этого сдвинем параболу $-2x=y^2$ вдоль осей координат: по $Ox$ на 3 единицы влево и по $Oy$ на 3 единицы вниз. Парабола разделила координатную плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Так же, как в предыдущем случае, можно проверить, что неравенство $-2(x+3)\le(y+3)^2$ задает внешнюю область параболы.



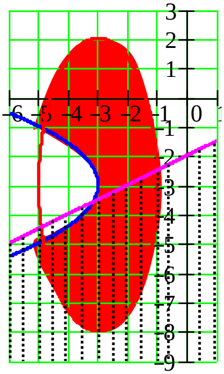
Тогда система

$$\begin{cases}\dfrac{(x+3)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{25}\le 1\\ -2(x+3)\le (y+3)^2\end{cases}$$

будет задавать область, являющуюся пересечением областей, задаваемых каждым из неравенств отдельно.



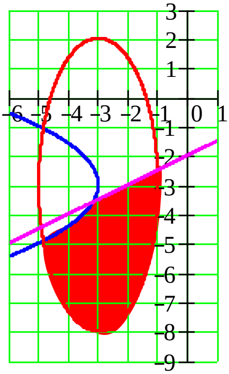
Неравенство $x–2y\geq 4$ также задает область на плоскости, а ее границей является прямая $x–2y=4$. Построим ее в прямоугольной системе координат. Убедимся, что неравенство $x–2y\geq 4$ задает нижнюю полуплоскость относительно прямой $x–2y=4$.



Итак, система

$$\begin{cases}\dfrac{(x+3)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{25}\le 1\\ -2(x+3)\le (y+3)^2\\ x-2y\ge 4\end{cases}$$

задает область, являющуюся пересечением трех областей, задаваемых каждым из неравенств отдельно.



# Тема 4. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

**Задания**.

1) *Доказать, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.*
2) *Составить уравнения плоскостей, содержащих грани пирамиды ABCD.*
3) *Составить уравнение плоскости, проходящей через вершину D параллельно грани ABC.*
4) *Составить уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD.*
5) *Составить канонические уравнения прямой, содержащей ребро CD.*
6) *Составить общие уравнения прямой, проходящей через точку B параллельно ребру AC.*
7) *Найти объем пирамиды ABCD.*
8) *Найти длину высоты DH пирамиды ABCD.*
9) *Найти площадь грани ABC пирамиды ABCD.*
10) *Найти величину угла между плоскостями ABC и ABD.*
11) *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB.*
12) *Составить параметрические уравнения прямой, содержащей высоту DH пирамиды ABCD.*
13) *Найти координаты основания высоты DH пирамиды ABCD.*

## ВАРИАНТЫ УСЛОВИЙ К ЗАДАНИЯМ

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** | A(–2;1;1); | B(–5;1;–2); | C(–3;0;3); | D(–6;0;1). |
| **2.** | A(–3;–4;1); | B(–2;–3;–5); | C(0;0;0); | D(–6;0;3). |
| **3.** | A(–2;4;5); | B(1;3;–4); | C(–5;–5;1); | D(–1;2;–2). |
| **4.** | A(–1;2;0); | B(–4;2;–3); | C(–2;1;2); | D(–5;1;0). |
| **5.** | A(–2;–3;0); | B(–1;–2;–6); | C(1;1;–1); | D(–5;1;2). |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **6.** | A(–1;5;–6); | B(2;4;–5); | C(–4;–4;0); | D(0;3;–3). |
| **7.** | A(–3;2;2); | B(–6;2;–1); | C(–4;1;4); | D(–7;1;2). |
| **8.** | A(–4;–3;2); | B(–3;–2;–4); | C(–1;1;1); | D(–7;1;4). |
| **9.** | A(–3;5;–4); | B(0;4;–3); | C(–6;–4;2); | D(–2;3;–1). |
| **10.** | A(0;1;1); | B(–3;1;–2); | C(–1;0;3); | D(–4;0;1). |
| **11.** | A(1;–2;1); | B(1;–5;–2); | C(0;–3;3); | D(0;–6;1). |
| **12.** | A(–4;–3;1); | B(–3;–2;–5); | C(0;0;0); | D(0;–6;3). |
| **13.** | A(4;–2;–5); | B(3;1;–4); | C(–5;–5;1); | D(2;–1;–2). |
| **14.** | A(2;–1;0); | B(2;–4;–3); | C(1;–2;2); | D(1;–5;0). |
| **15.** | A(–3;–2;0); | B(–2;–1;–6); | C(1;1;–1); | D(1;–5;2). |
| **16.** | A(5;–1;–6); | B(4;2;–5); | C(–4;–4;0); | D(3;0;–3). |
| **17.** | A(2;–3;2); | B(2;–6;–1); | C(1;–4;4); | D(1;–7;2). |
| **18.** | A(–3;–4;2); | B(–2;–3;–4); | C(1;–1;1); | D(1;–7;4). |
| **19.** | A(5;–3;–4); | B(4;0;–3); | C(–4;–6;2); | D(3;–2;–1). |
| **20.** | A(1;0;1); | B(1;–3;–2); | C(0;–1;3); | D(0;–4;1). |
| **21.** | A(1;0;1); | B(–2;1;–5); | C(3;0;–3); | D(1;0;–6). |
| **22.** | A(1;–4;–3); | B(–5;–3;–2); | C(0;0;0); | D(3;0;–6). |
| **23.** | A(–5;4;–2); | B(–4;3;1); | C(1;–5;–5); | D(–2;2;–1). |
| **24.** | A(0;2;–1); | B(–3;2;–4); | C(2;1;–2); | D(0;1;–5). |
| **25.** | A(0;–3;–2); | B(–6;–2;–1); | C(–1;1;1); | D(2;1;–5). |
| **26.** | A(–6;5;–1); | B(–5;4;2); | C(0;–4;–4); | D(–3;3;0). |
| **27.** | A(2;2;–3); | B(–1;2;–6); | C(4;1;–4); | D(2;1;–7). |
| **28.** | A(2;–3;–4); | B(–4;–2;–3); | C(1;1;–1); | D(4;1;–7). |
| **29.** | A(–4;5;–3); | B(–3;4;0); | C(2;–4;–6); | D(–1;3;–2). |
| **30.** | A(1;1;0); | B(–2;1;–3); | C(3;0;–1); | D(1;0;–4). |

**Пример**.

Пусть A(–5;–3;–2), B(3;0;–6), C(1;–4;–3), D(0;0;0).

1) Докажем, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Это можно сделать двумя способами: проверить, что одна из точек не лежит в плоскости, проходящей через три другие точки, или проверить, что векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ не компланарны.

Первый способ. Воспользуемся тем, что уравнение плоскости, проходящей через точки с координатами $(x_1;y_1;z_1)$, $(x_2;y_2;z_2)$, $(x_3;y_3;z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим, например, уравнение плоскости ABC. Тогда $(x_1;y_1;z_1)$, $(x_2;y_2;z_2)$, $(x_3;y_3;z_3)$ – это координаты точек A, B и C соответственно. Получаем уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-(-5) & y-(-3) & z-(-2) \\ 3-(-5) & 0-(-3) & -6-(-2) \\ 1-(-5) & -4-(-3) & -3-(-2) \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x+5 & y+3 & z+2 \\ 8 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x+5)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}+(z+2)\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$(x+5)(-7)-(y+3)\cdot 16+(z+2)(-26)=0$. Окончательно получаем уравнение плоскости ABC: $7x+16y+26z+135=0$. Проверим, удовлетворяют ли этому уравнению координаты точки D: $7\cdot 0+16\cdot 0+26\cdot 0+135=135\neq 0$. Значит, точка D не лежит в плоскости ABC, то есть точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

Второй способ. Воспользуемся тем, что вектор не компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Запишем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$: $\overline{AB}$=(8;3;–4), $\overline{AC}$=(6;–1;–1), $\overline{AD}$=(5;3;2).

Тогда $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -135\neq 0$. Значит, данные векторы не компланарны, поэтому точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.●

2) Составим уравнения плоскостей, содержащих грани пирамиды ABCD. Этих граней четыре, уравнение одной из плоскостей уже есть: $7x+16y+26z+135=0$ – уравнение плоскости ABC.

Теперь по тому же правилу составим уравнение плоскости ABD:

$$\begin{vmatrix} x+5 & y+3 & z+2 \\ 8 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,\ (x+5)\cdot 18-(y+3)\cdot 36+(z+2)\cdot 9=0,$$

$(x+5)\cdot 2-(y+3)\cdot 4+(z+2)=0$. Окончательно: $2x-4y+z=0$ – уравнение плоскости ABD.

Составим уравнение плоскости ACD:

$$\begin{vmatrix} x+5 & y+3 & z+2 \\ 6 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,\ (x+5)-(y+3)\cdot 17+(z+2)\cdot 23=0.$$

Окончательно: $x-17y+23z=0$ – уравнение плоскости ACD.

Составим уравнение плоскости BCD:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+6 \\ -2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0,\ (x-3)(-24)-y(-3)+(z+6)(-12)=0,$$

$(x-3)\cdot 8-y+(z+6)\cdot 4=0$. Окончательно: $8x-y+4z=0$ – уравнение плоскости BCD.

**Ответ**. ABC: $7x+16y+26z+135=0$; ABD: $2x-4y+z=0$;
ACD: $x-17y+23z=0$; BCD: $8x-y+4z=0$.•

3) Составим уравнение плоскости, проходящей через вершину D параллельно грани ABC. Для этого воспользуемся тем, что уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами $(x_0;y_0;z_0)$ параллельно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, имеет вид: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Плоскость ABC имеет уравнение $7x+16y+26z+135=0$, точка

D имеет координаты (0;0;0). Значит, уравнение искомой плоскости: $7(x–0)+16(y–0)+26(z–0)=0$.

**Ответ**: $7x+16y+26z=0$.•

4) Составим уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD. Для этого воспользуемся тем, что уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами $(x_0;y_0;z_0)$ и имеющей нормальный вектор **n**=(A;B;C), имеет вид: $A(x–x_0)+B(y–y_0)+C(z–z_0)=0$. В данном случае в качестве точки $(x_0;y_0;z_0)$ можно взять любую из точек A и B, а нормальный вектор **n** плоскости будет перпендикулярен неколлинеарным векторам $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, а значит, вектор **n** коллинеарен их векторному произведению $\overline{AB}\times\overline{CD}$. Поскольку $\overline{AB}$ =(8;3;–4) и $\overline{CD}$=(–1;4;3), то

$$\overline{AB}\times\overline{CD}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 8 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=25\boldsymbol{i}–20\boldsymbol{j}+35\boldsymbol{k}.$$ В качестве нормального вектора удобно взять коллинеарный ему вектор **n**=(5;–4;7). Возьмем в качестве точки $(x_0;y_0;z_0)$, например, точку B(3;0;–6). Тогда уравнение искомой плоскости имеет вид: $5(x–3)–4(y–0)+7(z+6)=0$.

**Ответ**: $5x–4y+7z+27=0$.•

5) Составим канонические уравнения прямой, содержащей ребро CD. Для этого воспользуемся тем, что канонические уравнения прямой, проходящей через точки $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$, имеют вид: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$. В данном случае $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$ – это точки C(1;–4;–3) и D(0;0;0). Получаем уравнения: $\dfrac{x-1}{0-1}=\dfrac{y+4}{0+4}=\dfrac{z+3}{0+3}$.

**Ответ**: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{3}$.•

6) Составим общие уравнения прямой, проходящей через точку B параллельно ребру AC. Для этого сначала составим канонические уравнения искомой прямой. Воспользуемся тем, что канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0;z_0)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y;a_z)$, имеют вид: $\dfrac{x-x_0}{a_x}=\dfrac{y-y_0}{a_y}=\dfrac{z-z_0}{a_z}$. Точка $(x_0;y_0;z_0)$ – это точка B(3;0;–6), $\boldsymbol{a}=\overline{AC}=(6;-1;-1)$. Получаем уравнения: $\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z-(-6)}{-1}$. Чтобы получить общие уравнения прямой, перепишем канонические уравнения в виде системы: $\begin{cases}\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y-0}{-1}\\ \dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z-(-6)}{-1}\end{cases}$, или $\begin{cases}x+6y-3=0\\ y-z-6=0\end{cases}$.

**Ответ**: $\begin{cases}x+6y-3=0\\ y-z-6=0\end{cases}$.•

7) Найдем объем пирамиды ABCD. Воспользуемся тем, что этот объем в 6 раз меньше, чем объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. А объем такого параллелепипеда равен модулю смешанного произведения этих векторов. В первом примере мы нашли, что $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=-135$. Значит, объем параллелепипеда равен 135, а объем пирамиды равен 135:6=22,5.

**Ответ**: 22,5.•

8) Найдем длину высоты DH пирамиды ABCD. Эта высота равна расстоянию от точки D до плоскости, содержащей противоположную грань, то есть до плоскости ABC. Воспользуемся тем, что расстояние от точки $(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равно $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Так

как плоскость ABC имеет уравнение $7x+16y+26z+135=0$ и D(0;0;0), то это расстояние равно $\dfrac{|7\cdot 0+16\cdot 0+26\cdot 0+135|}{\sqrt{7^2+16^2+26^2}}=$

$=\dfrac{135}{\sqrt{981}}=\dfrac{45}{\sqrt{109}}$.

**Ответ**: $\dfrac{45}{\sqrt{109}}$.•

9) Найдем площадь грани ABC пирамиды ABCD. Это можно сделать двумя способами: используя векторное произведение или используя выражение объема пирамиды через площадь основания и высоту.

Первый способ. Площадь треугольника ABC – это половина площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. А площадь такого параллелограмма равна модулю векторного произведения этих векторов. Так как $\overline{AB}$=(8;3;–4) и $\overline{AC}$=(6;–1;–1), то $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 8 & 3 & -4\\ 6 & -1 & -1\end{vmatrix}=$

$=-7\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}-26\boldsymbol{k}$, а $|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{981}=3\sqrt{109}$ – это площадь параллелограмма. А площадь треугольника равна $1{,}5\sqrt{109}$.

Второй способ. Объем пирамиды ABCD равен $\dfrac{SH}{3}$, где S – площадь грани ABC, а H – высота, проведенная к этой грани. Поскольку объем пирамиды равен 22,5 (пример 7), а высота равна $\dfrac{45}{\sqrt{109}}$ (пример 8), то $S=3\cdot 22{,}5:\dfrac{45}{\sqrt{109}}=$

$=\dfrac{3\cdot 22{,}5\sqrt{109}}{45}=\dfrac{3\sqrt{109}}{2}$.

**Ответ**: $\frac{3\sqrt{109}}{2}$.•

10) Найдем величину угла между плоскостями ABC и ABD. Косинус угла φ между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, равен $\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$. Плоскости ABC и ABD имеют уравнения $7x+16y+26z+135=0$ и $2x-4y+z=0$, поэтому

$$\cos\varphi=\frac{|7\cdot 2+16\cdot(-4)+26\cdot 1|}{\sqrt{7^2+16^2+26^2}\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{|-24|}{\sqrt{981}\sqrt{21}}=\frac{8}{\sqrt{2289}}.$$

**Ответ**: $\arccos\frac{8}{\sqrt{2289}}$.•

11) Составим уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно ребру AB. Для этой плоскости нормальный вектор **n**$=\overline{AB}=(8;3;-4)$, а D(0;0;0). Значит, уравнение плоскости: $8(x-0)+3(y-0)-4(z-0)=0$.

**Ответ**: $8x+3y-4z=0$.•

12) Составим параметрические уравнения прямой, содержащей высоту DH пирамиды ABCD. Для этого сначала составим канонические уравнения искомой прямой. Воспользуемся тем, что канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0;z_0)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y;a_z)$, имеют вид: $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$. Точка $(x_0;y_0;z_0)$ – это точка D(0;0;0). А так как прямая DH перпендикулярна грани ABC, то ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ – это нормальный вектор плоскости ABC. Плоскость ABC имеет уравнение $7x+16y+26z+135=0$. Значит, $\boldsymbol{a}=(7;16;26)$. Получаем канонические уравнения прямой DH: $\frac{x}{7}=\frac{y}{16}=\frac{z}{26}$.

Чтобы получить параметрические уравнения прямой DH, обозначим каждую из этих равных дробей через t, тогда

получим: $\begin{cases} x = 7t \\ y = 16t \\ z = 26t \\ t \in R \end{cases}$.

**Ответ**: $\begin{cases} x = 7t \\ y = 16t \\ z = 26t \\ t \in R \end{cases}$.●

13) Найдем координаты основания высоты DH пирамиды ABCD. Искомая точка лежит на прямой DH и в плоскости ABC, значит, ее координаты удовлетворяют уравнениям $\begin{cases} x = 7t \\ y = 16t \\ z = 26t \\ t \in R \end{cases}$ и 7$x$+16$y$+26$z$+135=0. Подставим выражения для $x$, $y$ и $z$ в уравнение плоскости ABC: $7\cdot 7t+16\cdot 16t+26\cdot 26t+135=0$, $981t= -135$, $t=-\frac{15}{109}$. Теперь найдем координаты искомой точки: $x=-\frac{15}{109}\cdot 7$, $y=-\frac{15}{109}\cdot 16$, $z=-\frac{15}{109}\cdot 26$.

**Ответ**: $(-\frac{105}{109};-\frac{240}{109};-\frac{390}{109})$.●

## Тема 5. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Задание 1**.

*Вычислить определители матриц A и B.*

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 1

| Вариант | **Матрица A** | **Матрица B** |
|---|---|---|
| **1.** | $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **2.** | $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **3.** | $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **4.** | $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **5.** | $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ |
| **6.** | $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **7.** | $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \\ -6 & 4 & -9 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **8.** | $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **9.** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **10.** | $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **11.** | $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **12.** | $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ |
| **13.** | $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **14.** | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **15.** | $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **16.** | $\begin{pmatrix} 9 & -5 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **17.** | $\begin{pmatrix} 10 & -8 & 0 \\ 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ |
| **18.** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **19.** | $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ |
| **20.** | $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **21.** | $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **22.** | $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **23.** | $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -9 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **24.** | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **25.** | $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **26.** | $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 7 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & -6 \\ 4 & 0 & 6 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **27.** | $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **28.** | $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 9 \\ 9 & -7 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **29.** | $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **30.** | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ -3 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ |

## Пример

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. Воспользуемся формулой определителя 3-го порядка: если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то $|A| =$

$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32})$.

По этой формуле $|A| = 5\cdot 0\cdot 7+3\cdot 0\cdot 4+(-1)(-6)(-2)-((-1)\cdot 0\cdot 4+$ $+3(-6)\cdot 7+5\cdot 0(-2)) = 0+0-12-(0-126+0) = -12+126 = 114$.

Заметим, что этот определитель можно найти быстрее, если разложить его по второй строке, воспользовавшись формулой:

$|A| = a_{21}\text{A}_{21}+a_{22}\text{A}_{22}+a_{23}\text{A}_{23}$. По этой формуле

$$|A| = -6\text{A}_{21}+0\text{A}_{22}+0\text{A}_{23} = -6(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 6(21-2) = 114.$$

**Ответ**: $|A|=114$.

б) $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 12 \\ -3 & 4 & -4 & 5 \\ -4 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Чтобы упростить вычисления, преобразуем определитель так, чтобы в какой-то строке (или столбце) все числа, кроме, быть может, одного, были равны нулю. Для этого воспользуемся одним из свойств определителя: определитель не меняется, если к строке прибавить другую строку, умноженную на число (или к столбцу прибавить другой столбец, умноженный на число). Например, можно взять второй столбец и преобразовать его так, чтобы все элементы, кроме четвертого, равнялись нулю. Для этого надо сначала к первой строке прибавить четвертую, умноженную на 2, а затем к третьей строке прибавить четвертую, умноженную на –4. Получим:

$$|B|=\begin{vmatrix} 2+(-4)\cdot 2 & -2+1\cdot 2 & 3+7\cdot 2 & 2+0\cdot 2 \\ 4 & 0 & 5 & 12 \\ -3+(-4)\cdot(-4) & 4+1\cdot(-4) & -4+7\cdot(-4) & 5+0\cdot(-4) \\ -4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}=$$

$=\begin{vmatrix} -6 & 0 & 17 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 12 \\ 13 & 0 & -32 & 5 \\ -4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$. Разложим определитель по второму столбцу: $|B|=b_{42}A_{42}=1\cdot(-1)^{4+2}M_{42}=\begin{vmatrix} -6 & 17 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \\ 13 & -32 & 5 \end{vmatrix}$. Этот определитель тоже можно преобразовать: прибавим ко второй строке первую, умноженную на –6, а к третьей строке – первую, умноженную на –2,5:

$$|B| = \begin{vmatrix} -6 & 17 & 2 \\ 4+(-6)(-6) & 5+17(-6) & 12+2(-6) \\ 13+(-6)(-2{,}5) & -32+17(-2{,}5) & 5+2(-2{,}5) \end{vmatrix} =$$

$= \begin{vmatrix} -6 & 17 & 2 \\ 40 & -97 & 0 \\ 28 & -74{,}5 & 0 \end{vmatrix}$. Этот определитель разложим по третьему столбцу: $|B| = 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 40 & -97 \\ 28 & -74{,}5 \end{vmatrix} = 2(-2980+2716) = -528.$

**Ответ**: $|B| = -528$.•

**<u>Задание 2</u>**.

*Для данных матриц A и B указать, какие из операций выполнимы, и выполнить их: 1) A+B; 2) $A^T$+B; 3) A+$B^T$; 4) $A^T$+$B^T$; 5) AB; 6) $A^T$B; 7) A$B^T$; 8) B$A^T$.*

<u>ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 2</u>

| Вариант | **Матрица A** | **Матрица B** |
|---|---|---|
| **1.** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 13 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **2.** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ |
| **3.** | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **4.** | $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 9 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **5.** | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **6.** | $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 13 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **7.** | $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **8.** | $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **9.** | $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -6 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ |
| **10.** | $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **11.** | $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ |
| **12.** | $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 9 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **13.** | $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 7 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **14.** | $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 9 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 7 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ |
| **15.** | $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ |
| **16.** | $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 9 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -6 & 4 & -7 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **17.** | $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 9 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ |
| **18.** | $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ |
| **19.** | $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 10 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ |
| **20.** | $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **21.** | $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 3 & 7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -7 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **22.** | $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 4 & -9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 7 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ |
| **23.** | $\begin{pmatrix} -8 & 6 & 3 \\ -4 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 4 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **24.** | $\begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ |
| **25.** | $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -5 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ |
| **26.** | $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 7 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & -6 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ |
| **27.** | $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 8 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ |
| **28.** | $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -6 & -7 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **29.** | $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 11 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ |
| **30.** | $\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & -3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 9 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ |

## Пример

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 8\\ -9 & 7 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}7 & 9\\ 2 & 0\\ -4 & 13\end{pmatrix}.$$

1) Поскольку A – 2×3-матрица, а B – 3×2-матрица, то найти сумму A+B нельзя: складывать можно только матрицы одного размера.

2) Чтобы записать матрицу $A^T$, нужно строки матрицы A поменять местами с ее столбцами: $A^T=\begin{pmatrix}0 & -9\\ -2 & 7\\ 8 & 3\end{pmatrix}$ – это 3×2-матрица, как и матрица B. Поэтому сумму $A^T+B$ найти можно. Сложение матриц выполняется поэлементно:

$$A^T+B=\begin{pmatrix}0 & -9\\ -2 & 7\\ 8 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 9\\ 2 & 0\\ -4 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+7 & -9+9\\ -2+2 & 7+0\\ 8+(-4) & 3+13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\\ 4 & 16\end{pmatrix}.$$

3) $B^T=\begin{pmatrix}7 & 2 & -4\\ 9 & 0 & 13\end{pmatrix}$ – это 2×3-матрица, как и матрица A. Поэтому сумму $A+B^T$ найти можно: $A+B^T=$

$$=\begin{pmatrix}0 & -2 & 8\\ -9 & 7 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 2 & -4\\ 9 & 0 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+7 & -2+2 & 8-4\\ -9+9 & 7+0 & 3+13\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 0 & 4\\ 0 & 7 & 16\end{pmatrix}.$$

Из предыдущего пункта видно, что $A+B^T=(A^T+B)^T$. Действительно, используя свойства операции транспонирования, можно получить: $(A^T+B)^T=(A^T)^T+(B)^T=A+B^T$.

4) Из двух предыдущих пунктов видно, что $A^T$ – 3×2-матрица, а $B^T$ – 2×3-матрица. Значит, сумму $A^T+B^T$ найти нельзя, поскольку слагаемые – матрицы разного размера.

5) Чтобы матрицы можно было перемножить, число столбцов первого множителя должно равняться числу строк второго множителя. Поскольку A – 2×3-матрица, а B – 3×2-матрица, то найти произведение AB можно. Воспользуемся правилом умножения матриц: если A – m×n-матрица, а B – n×k-матрица, то их произведение AB=$\left(c_{ij}\right)$ – m×k-матрица, элементы которой находят по формуле: $c_{ij} = \overline{a}_i\,\overline{b}^{\,j}$ (скалярное произведение i-ой строки матрицы A и j-ого столбца матрицы B). Тогда AB = $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ -9 & 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 0 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$ =

$$=\begin{pmatrix} 0\cdot 7+(-2)\cdot 2+8(-4) & 0\cdot 9+(-2)\cdot 0+8\cdot 13 \\ -9\cdot 7+7\cdot 2+3(-4) & -9\cdot 9+7\cdot 0+3\cdot 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -36 & 104 \\ -61 & -42 \end{pmatrix}.$$

6) $A^T$ – 3×2-матрица, B – 3×2-матрица. Число столбцов первой матрицы (2) не равно числу строк второй матрицы (3). Поэтому произведение $A^TB$ найти нельзя.

7) A – 2×3-матрица, $B^T$ – 2×3-матрица. Число столбцов первой матрицы (3) не равно числу строк второй матрицы (2). Поэтому произведение $AB^T$ найти нельзя.

8) B – 3×2-матрица, $A^T$ – 3×2-матрица. Число столбцов первой матрицы (2) не равно числу строк второй матрицы (3). Поэтому произведение $BA^T$ найти нельзя.

**Ответ**:

$$A^T+B=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \\ 4 & 16 \end{pmatrix};\ A+B^T=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 16 \end{pmatrix};\ AB=\begin{pmatrix} -36 & 104 \\ -61 & -42 \end{pmatrix};$$

остальные операции невыполнимы.

**<u>Задание 3</u>**.

*Для данной матрицы A найти обратную, если она существует, и сделать проверку: убедиться, что $AA^{-1} = E$.*

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 3

| Вариант | Матрица А | Вариант | Матрица А |
|---|---|---|---|
| **1.** | $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | **2.** | $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **3.** | $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ | **4.** | $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ |
| **5.** | $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ | **6.** | $A=\begin{pmatrix} 17 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **7.** | $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | **8.** | $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **9.** | $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ | **10.** | $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **11.** | $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ | **12.** | $A=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **13.** | $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ | **14.** | $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **15.** | $A=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | **16.** | $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **17.** | $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ | **18.** | $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **19.** | $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | **20.** | $A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ |
| **21.** | $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | **22.** | $A=\begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ |
| **23.** | $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ | **24.** | $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 10 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ |
| **25.** | $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ | **26.** | $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ |
| **27.** | $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | **28.** | $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **29.** | $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ | **30.** | $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ |

## Пример

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Найдем матрицу $A^{-1}$.

Первый способ.

Чтобы найти матрицу, обратную матрице A порядка n, записывают рядом A и E, а затем к полученной n×2n-матрице применяют элементарные преобразования строк так, чтобы матрица A превратилась в единичную матрицу. При этом на месте матрицы E появится матрица $A^{-1}$.

Запишем: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на –3, а к третьей строке – первую, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Умножим третью строку на –0,2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}4 & -0{,}6 & -0{,}2 \end{array}\right).$$

Прибавим к первой строке третью, умноженную на –1, а ко второй строке – третью, умноженную на 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & -1 & 0 & 2{,}6 & -1{,}4 & -0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}4 & -0{,}6 & -0{,}2 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку на –1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0 & -2{,}6 & 1{,}4 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}4 & -0{,}6 & -0{,}2 \end{array}\right).$$

Прибавим к первой строке вторую, умноженную на –1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2{,}2 & -0{,}8 & -0{,}6 \\ 0 & 1 & 0 & -2{,}6 & 1{,}4 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}4 & -0{,}6 & -0{,}2 \end{array}\right).$$ Слева – матрица Е.

Значит, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}2 & -0{,}8 & -0{,}6 \\ -2{,}6 & 1{,}4 & 0{,}8 \\ 1{,}4 & -0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix}$.

*Проверка*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2{,}2 & -0{,}8 & -0{,}6 \\ -2{,}6 & 1{,}4 & 0{,}8 \\ 1{,}4 & -0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2{,}2+(-2{,}6)+1{,}4 & -0{,}8+1{,}4+(-0{,}6) & -0{,}6+0{,}8+(-0{,}2) \\ 6{,}6+(-5{,}2)+(-1{,}4) & -2{,}4+2{,}8+0{,}6 & -1{,}8+1{,}6+0{,}2 \\ -4{,}4+(-2{,}6)+7 & 1{,}6+1{,}4+(-3) & 1{,}2+0{,}8+(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $AA^{-1}$=Е. Значит, матрица $A^{-1}$ найдена верно.

<u>Второй способ.</u>

Матрицу, обратную матрице А, можно найти по формуле: $A^{-1}=(b_{ij})$, где $b_{ij}=\frac{1}{|A|}A_{ji}$.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $|A|$=10+2+3–(–4–1+15)=15–10=5.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы А:

$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=11$; $A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-4$; $A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3$;

$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-13$; $A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=7$; $A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=4$;

$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=7$; $A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3$; $A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1$.

$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 11 & -4 & -3 \\ -13 & 7 & 4 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2{,}2 & -0{,}8 & -0{,}6 \\ -2{,}6 & 1{,}4 & 0{,}8 \\ 1{,}4 & -0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix}$. Результат, конечно, получился тот же, что и в первом случае.

**Ответ**: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2{,}2 & -0{,}8 & -0{,}6 \\ -2{,}6 & 1{,}4 & 0{,}8 \\ 1{,}4 & -0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix}$. •

Задание 4.

*Решить систему уравнений методом Крамера, Гаусса и методом обратной матрицы. Сделать проверку.*

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 4

| Вариант | **Система уравнений** | Вариант | **Система уравнений** |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ 3x+3y-2z=8. \\ x+y+z=6 \end{cases}$ | **2.** | $\begin{cases} x-y+z=6 \\ x-2y+z=9\,. \\ x-4y-2z=3 \end{cases}$ |
| **3.** | $\begin{cases} 4x+2y-z=1 \\ 5x+3y-2z=2. \\ 3x+2y-3z=0 \end{cases}$ | **4.** | $\begin{cases} 3x+y+3z=2 \\ 5x-2y+2z=1. \\ 2x+2y+3z=1 \end{cases}$ |
| **5.** | $\begin{cases} 5x+2y+5z=4 \\ 3x+5y-3z=-1. \\ -2x-4y+3z=1 \end{cases}$ | **6.** | $\begin{cases} -4x+y+3z=1 \\ 3x-y-4z=2\,. \\ 2x+3y+z=-3 \end{cases}$ |
| **7.** | $\begin{cases} 3x+4y+z=2 \\ x+3y+4z=-4. \\ x+2y+z=1 \end{cases}$ | **8.** | $\begin{cases} -x-2y-z=2 \\ 5x+2y+4z=7. \\ x-y+5z=-3 \end{cases}$ |
| **9.** | $\begin{cases} x+3y-z=3 \\ 4x+3y-2z=-2. \\ 2x+2y-z=5 \end{cases}$ | **10.** | $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ -x-y+2z=6. \\ 2x+y-z=-1 \end{cases}$ |
| **11.** | $\begin{cases} -x+2y-z=5 \\ -x-3y-3z=4\,. \\ -2x-2y-2z=3 \end{cases}$ | **12.** | $\begin{cases} 3x+y+z=2 \\ x+3y+2z=-5. \\ 6x+2y+z=2 \end{cases}$ |
| **13.** | $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+5z=-3. \\ -x+y+3z=4 \end{cases}$ | **14.** | $\begin{cases} 3x+y+z=9 \\ x-y+2z=-3. \\ -x+y-z=6 \end{cases}$ |
| **15.** | $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ 2x+4y+2z=-1. \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$ | **16.** | $\begin{cases} 5x+y+2z=3 \\ 2x+y+z=-1. \\ 3x+y+2z=2 \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **17.** | $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y+3z=5. \\ -x+y-z=2 \end{cases}$ | **18.** | $\begin{cases} 3x+3y-3z=-5 \\ 2x+y+2z=9\ . \\ -x-2y+z=6 \end{cases}$ |
| **19.** | $\begin{cases} -x+3y+z=2 \\ x+3y+4z=-3. \\ 2x-3y+2z=5 \end{cases}$ | **20.** | $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ x+4y+2z=1\ . \\ 3x+2y-z=-3 \end{cases}$ |
| **21.** | $\begin{cases} -3x+2y+z=9 \\ 2x+4y+2z=1. \\ -x+2y+3z=4 \end{cases}$ | **22.** | $\begin{cases} 3x+y+z=4 \\ x-y+2z=3\ . \\ -2x+y-z=-1 \end{cases}$ |
| **23.** | $\begin{cases} 2x+3y+2z=3 \\ x-y+z=5\ . \\ -2x+y+2z=3 \end{cases}$ | **24.** | $\begin{cases} 5x+y+z=4 \\ x+2y+3z=-1. \\ -2x+2y+z=5 \end{cases}$ |
| **25.** | $\begin{cases} 2x+4y-z=6 \\ 3x-2y+z=-3. \\ -2x+3y-z=7 \end{cases}$ | **26.** | $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ 2x-4y-2z=1. \\ -x-2y+3z=2 \end{cases}$ |
| **27.** | $\begin{cases} 4x+2y+3z=0 \\ 3x+3y-2z=5. \\ 2x+4y+z=-2 \end{cases}$ | **28.** | $\begin{cases} 2x+3y-2z=6 \\ x-y+z=5\ . \\ 2x+y+2z=3 \end{cases}$ |
| **29.** | $\begin{cases} 3x-2y+z=7 \\ 5x-4y+z=5\ . \\ 3x+5y+z=-2 \end{cases}$ | **30.** | $\begin{cases} 2x+y-4z=3 \\ -3x+5y+6z=1. \\ 2x-4y-7z=4 \end{cases}$ |

**Пример.**

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ 3x_1+2x_2-x_3=-1\ . \\ -2x_1+x_2+5x_3=0 \end{cases}$$

1)<u>Метод Крамера</u>. Если $|A| \neq 0$, то систему можно решить по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, – где $\Delta = |A|$, а $\Delta_k$ – определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой k-го столбца столбцом свободных членов.

В нашем примере:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 37,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -46,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 24.$$

Тогда по правилу Крамера $x_1 = 7{,}4$, $x_2 = -9{,}2$, $x_3 = 4{,}8$.

*Проверка*:

$x_1+x_2+x_3 = 7{,}4 - 9{,}2 + 4{,}8 = 3;$

$3x_1+2x_2-x_3 = 22{,}2 - 18{,}4 - 4{,}8 = -1;$

$-2x_1+x_2+5x_3 = -14{,}8 - 9{,}2 + 24 = 0.$

Таким образом, решение найдено верно.

2)<u>Метод обратной матрицы</u>. Систему $A\bar{x} = \bar{b}$, где $|A| \neq 0$, можно решить по формуле: $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$.

В нашем примере $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Как показано в примере к предыдущему заданию,

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 11 & -4 & -3 \\ -13 & 7 & 4 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\bar{x}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}11 & -4 & -3\\ -13 & 7 & 4\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}33+4+0\\ -39-7+0\\ 21+3+0\end{pmatrix}=$

$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}37\\ -46\\ 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7{,}4\\ -9{,}2\\ 4{,}8\end{pmatrix}.$

Получилось то же решение: $x_1 = 7{,}4$, $x_2 = –9{,}2$, $x_3 = 4{,}8$.

**Ответ**: $x_1 = 7{,}4$, $x_2 = –9{,}2$, $x_3 = 4{,}8$.•

**Задание 5**.

*Сравнить ранги основной и расширенной матриц системы линейных уравнений, сделать вывод и решить систему методом Гаусса; записать какое-нибудь частное решение и для него сделать проверку.*

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 5

| **Вариант** | **Система уравнений** |
|---|---|
| **1.** | $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=4\\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=6\\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=6\\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=14\end{cases}.$ |
| **2.** | $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1\\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1\\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=6\\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1\end{cases}.$ |

| | |
|---|---|
| **3.** | $\begin{cases} 5x_1+7x_2+4x_3+6x_4+6x_5=2 \\ 15x_1+30x_2+7x_3+8x_4+3x_5=-13 \\ 9x_1+6x_2+5x_3+8x_4+9x_5=9 \\ 6x_1+9x_2+3x_3+4x_4+3x_5=-1 \end{cases}.$ |
| **4.** | $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3 \end{cases}.$ |
| **5.** | $\begin{cases} 6x_1+5x_2+7x_3+5x_4+3x_5=6 \\ 14x_1+5x_2+3x_3+9x_4-x_5=2 \\ 4x_1+5x_2+8x_3+4x_4+4x_5=7 \\ 8x_1+5x_2+4x_3+7x_4+2x_5=2 \end{cases}.$ |
| **6.** | $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=1 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=-1 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=-2 \end{cases}.$ |
| **7.** | $\begin{cases} 15x_1+2x_2+4x_3-3x_4+9x_5=23 \\ 3x_1+20x_2+5x_3-2x_4+6x_5=-8 \\ 3x_1+6x_2+2x_3-x_4+3x_5=1 \\ 9x_1+4x_2+3x_3-2x_4+6x_5=12 \end{cases}.$ |
| **8.** | $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-2x_4+4x_5=1 \\ 13x_1+8x_2+4x_3-3x_4+6x_5=9 \\ 5x_1+4x_2+2x_3-3x_4+6x_5=3 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5=2 \end{cases}.$ |

| | |
|---|---|
| **9.** | $\begin{cases} 13x_1-4x_2-3x_3-4x_4-6x_5=8 \\ 11x_1-2x_2+x_3-2x_4-3x_5=7 \\ 5x_1+4x_2+7x_3+4x_4+6x_5=4 \\ 7x_1+2x_2+5x_3+2x_4+3x_5=5 \end{cases}.$ |
| **10.** | $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+6x_4+9x_5=2 \\ x_2-2x_3+2x_4+3x_5=-7 \\ 2x_1+x_2+4x_3+2x_4+3x_5=3 \\ 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4+6x_5=1 \end{cases}.$ |
| **11.** | $\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+2x_4+5x_5=6 \\ 5x_1-3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=7 \\ x_1-3x_2-5x_3-9x_5=-4 \\ 7x_1-5x_2+x_3+4x_4+x_5=6 \end{cases}.$ |
| **12.** | $\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+x_4+2x_5=1 \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4+4x_5=4 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4+6x_5=5 \end{cases}.$ |
| **13.** | $\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_3+4x_4+5x_5=7 \\ 6x_1+2x_2+2x_3-x_4=-2 \\ -3x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=5 \\ 11x_1+3x_2+3x_3+x_4-x_5=-5 \end{cases}.$ |
| **14.** | $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4-x_5=-1 \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4+2x_5=1 \\ 5x_1-5x_2+12x_3+11x_4-4x_5=-4 \\ x_1-3x_2+6x_3+3x_4-3x_5=-2 \end{cases}.$ |

| | |
|---|---|
| **15.** | $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1 \end{cases}.$ |
| **16.** | $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 5 \end{cases}.$ |
| **17.** | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}.$ |
| **18.** | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -7 \end{cases}.$ |
| **19.** | $\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 10 \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 7 \end{cases}.$ |
| **20.** | $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}.$ |

| | |
|---|---|
| **21.** | $\begin{cases} 6x_1+x_2-3x_3+9x_4+5x_5=0 \\ 6x_1+5x_2-3x_3+9x_4+7x_5=6 \\ 2x_1+4x_2-x_3+3x_4+2x_5=4 \\ 4x_1+7x_2-2x_3+6x_4+5x_5=8 \end{cases}.$ |
| **22.** | $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3 \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4+5x_5=8 \\ 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4-3x_5=-2 \\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3 \end{cases}.$ |
| **23.** | $\begin{cases} x_1-4x_2-4x_3+x_4-3x_5=-3 \\ x_1+7x_2+6x_3-2x_4+6x_5=2 \\ 9x_1+8x_2+4x_3-3x_4+9x_5=-7 \\ 7x_1+5x_2+2x_3-2x_4+6x_5=-6 \end{cases}.$ |
| **24.** | $\begin{cases} 8x_1-4x_2+3x_3+6x_4+8x_5=5 \\ 10x_1-5x_2+5x_3+9x_4+15x_5=10 \\ 4x_1-2x_2+x_3+2x_4+2x_5=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3+7x_4+11x_5=8 \end{cases}.$ |
| **25.** | $\begin{cases} 5x_1+6x_2+x_3+10x_4+7x_5=3 \\ 5x_1+x_2+2x_3+5x_4+4x_5=7 \\ 4x_1+3x_2+x_3+7x_4+5x_5=4 \\ 3x_1+2x_2+x_3+4x_4+3x_5=3 \end{cases}.$ |
| **26.** | $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=3 \\ x_1-3x_2+x_3-x_5=-2 \\ 4x_1-7x_2+5x_3-x_4-2x_5=-1 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2 \end{cases}.$ |

| | |
|---|---|
| **27.** | $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-3x_4+2x_5=3 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4-3x_5=2 \\ x_1+x_2+2x_3+2x_4-2x_5=4 \\ 2x_1+3x_2-5x_3-17x_4+10x_5=-7 \end{cases}.$ |
| **28.** | $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3+4x_4+6x_5=5 \\ 3x_1-x_2-x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+3x_5=3 \\ 4x_1-4x_3-2x_4-3x_5=-1 \end{cases}.$ |
| **29.** | $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=5 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=-2 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2 \\ 3x_1-3x_2+4x_3-2x_4-x_5=1 \end{cases}.$ |
| **30.** | $\begin{cases} 5x_1-x_3+5x_4+3x_5=-4 \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=4 \\ x_1+x_2+3x_4+2x_5=1 \\ -3x_1+3x_2-2x_3+x_4=-7 \end{cases}.$ |

## <u>Пример</u>

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4-2x_5=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=4 \\ 3x_1+3x_2-3x_4=9 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-1 \end{cases}.$$

Запишем расширенную матрицу системы и будем приводить эту матрицу к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на –2, к третьей строке – первую, умноженную на –3, к четвертой строке – первую, умноженную на –1:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & -3 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Поменяем местами вторую и четвертую строки:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & -3 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на –9, к четвертой строке – вторую, умноженную на –5:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 24 & -36 & -12 & 24 \\ 0 & 0 & 12 & -18 & -6 & 12 \end{array}\right).$$

Прибавим к четвертой строке третью, умноженную на –0,5:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 24 & -36 & -12 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Вычеркнем нулевую строку, а третью строку разделим на 12. Получим ступенчатый вид матрицы $\widetilde{A}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Таким образом, ранг матрицы $\widetilde{A}$ равен 3. Матрица слева от вертикальной черты представляет ступенчатый вид матрицы $A$; таким образом, ее ранг также равен 3. Значит, ранги матриц $\widetilde{A}$ и $A$ совпадают. Поэтому по теореме Кронекера-Капелли данная система линейных уравнений совместна. Поскольку же ранг системы (3) меньше числа неизвестных (5), то система имеет бесконечно много решений. Чтобы найти их, выпишем преобразованную систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}.$$

Выразим из последнего уравнения $x_5$ и подставим в предпоследнее уравнение:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2(2x_3 - 3x_4 - 2) = -2 \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases},$$

то есть

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases}.$$

Выразим из предпоследнего уравнения $x_2$ и подставим в предыдущее уравнение:

$$\begin{cases} x_1 - 2(-x_3 + 2x_4 + 2) + x_3 - x_4 - 2(2x_3 - 3x_4 - 2) = 1 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 + 2 \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases},$$

то есть $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 + 2 \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases}$. Отсюда получаем общее решение: $\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 + 1 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 + 2 \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases}$, где $x_3$, $x_4$ – свободные неизвестные. Заметим, что число свободных неизвестных равно разности между числом неизвестных и рангом системы: 5–3=2.

Чтобы найти какое-нибудь частное решение, придадим свободным неизвестным какие-нибудь конкретные значения: пусть, например, $x_3 = x_4 = 0$. Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_5 = -2$. Подставим эти значения в уравнения системы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 - 4 + 0 + 0 + 4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 + 2 - 0 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 3 + 6 + 0 = 9 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 - 2 + 0 + 0 = -1 \end{cases}.$$

Итак, найденное частное решение удовлетворяет системе.

**Ответ**: общее решение $\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 + 1 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 + 2 \\ x_5 = 2x_3 - 3x_4 - 2 \end{cases}$,

где $x_3$, $x_4$ – свободные неизвестные;

частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = -2$.•

# <u>Тема 6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ</u>

**<u>Задание 1</u>**.

*Определить, образует ли линейное пространство над полем действительных чисел данное множество М, в котором определены сумма $x \oplus y$ элементов множества М и произведение $\alpha \otimes x$ действительного числа $\alpha$ и элемента $x$ множества М.*

<u>ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 1</u>

| **Вариант** | **Множество М** | **Сложение** | **Умножение на число** |
|---|---|---|---|
| **1.** | Трехмерные векторы с целочисленными координатами | $x \oplus y = x + y$ | $\alpha \otimes x = \alpha x$ |
| **2.** | Трехмерные векторы, лежащие на оси Oz | $x \oplus y = x + y$ | $\alpha \otimes x = \alpha x$ |
| **3.** | Двумерные векторы, каждый из которых лежит на оси О$x$или на оси О$y$ | $x \oplus y = x + y$ | $\alpha \otimes x = \alpha x$ |
| **4.** | Все трехмерные векторы | $x \oplus y = x \times y$ | $\alpha \otimes x = \alpha x$ |
| **5.** | Трехмерные векторы, лежащие на оси О$y$ | $x \oplus y = x + y$ | $\alpha \otimes x = \alpha \lvert x \rvert \mathbf{j}$ |
| **6.** | Трехмерные векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов ***a***, | $x \oplus y = x + y$ | $\alpha \otimes x = \alpha x$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ***b*** и ***c*** | | |
| **7.** | Функции, принимающие положительные значения | $f(t)\oplus g(t)= =f(t)\cdot g(t)$ | $\alpha\otimes f(t)=(f(t))^{\alpha}$ |
| **8.** | Непрерывные функции, определенные на отрезке [0;1] | $f(t)\oplus g(t)= =f(t)+g(t)$ | $\alpha\otimes f(t)=\alpha\cdot f(t)$ |
| **9.** | Четные функции, определенные на отрезке [–1;1] | $f(t)\oplus g(t)= =f(t)\cdot g(t)$ | $\alpha\otimes f(t)=\alpha\cdot f(t)$ |
| **10.** | Нечетные функции, определенные на отрезке [–1;1] | $f(t)\oplus g(t)= =f(t)+g(t)$ | $\alpha\otimes f(t)=\alpha\cdot f(t)$ |
| **11.** | Функции двух переменных вида $f(x,y)=ax+by$ | $f(x,y)\oplus \oplus g(x,y)= =f(x,y)+ +g(x,y)$ | $\alpha\otimes f(x,y)=\alpha f(x,y)$ |
| **12.** | Многочлены третьей степени от переменной $x$ | $\mathrm{P}(x)\oplus\mathrm{Q}(x) =\mathrm{P}(x)+ +\mathrm{Q}(x)$ | $\alpha\otimes\mathrm{P}(x)=\alpha\mathrm{P}(x)$ |
| **13.** | Многочлены степени не выше третьей от переменной $x$ | $\mathrm{P}(x)\oplus\mathrm{Q}(x) =\mathrm{P}(x) +\mathrm{Q}(x)$ | $\alpha\otimes\mathrm{P}(x)=\alpha\mathrm{P}(x)$ |
| **14.** | Упорядоченные наборы из n чисел: $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ | $x\oplus y= (x_1+y_1, x_2+y_2,\dots, x_n+y_n)$ | $\alpha\otimes x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **15.** | Упорядоченные наборы из n чисел: $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ | $x \oplus y=$ $(x_1y_1,\ x_2y_2,$ $\ldots, x_ny_n)$ | $\alpha \otimes x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ |
| **16.** | Сходящиеся последовательности: $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ | $x \oplus y=$ $=(x_n+y_n)$ | $\alpha \otimes x=(\alpha x_n)$ |
| **17.** | Расходящиеся последовательности: $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ | $x \oplus y=$ $=(x_n+y_n)$ | $\alpha \otimes x=(\alpha x_n)$ |
| **18.** | Многочлены степени не выше второй от переменных *x* и *y* | $\mathrm{P}(x,y) \oplus$ $\oplus \mathrm{Q}(x,y)=$ $=\mathrm{P}(x,y)+$ $+\mathrm{Q}(x,y)$ | $\alpha \otimes \mathrm{P}(x,y)=\alpha \mathrm{P}(x,y)$ |
| **19.** | Диагональные матрицы пятого порядка: $\mathrm{A}=(a_{ij})$, $\mathrm{B}=(b_{ij})$ | $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}=$ $=(a_{ij}+b_{ij})$ | $\alpha \otimes \mathrm{A}=(\alpha a_{ij})$ |
| **20.** | Невырожденные матрицы пятого порядка: $\mathrm{A}=(a_{ij})$, $\mathrm{B}=(b_{ij})$ | $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}=\mathrm{AB}$ | $\alpha \otimes \mathrm{A}=(\alpha a_{ij})$ |
| **21.** | Квадратные матрицы пятого порядка: $\mathrm{A}=(a_{ij})$, $\mathrm{B}=(b_{ij})$ | $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}=$ $=(a_{ij}+b_{ij})$ | $\alpha \otimes \mathrm{A}=(\alpha a_{ij})$ |
| **22.** | Диагональные матрицы пятого порядка: $\mathrm{A}=(a_{ij})$, $\mathrm{B}=(b_{ij})$ | $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}=\mathrm{AB}$ | $\alpha \otimes \mathrm{A}=(\alpha a_{ij})$ |
| **23.** | Матрицы размером 3x4: $\mathrm{A}=(a_{ij})$, $\mathrm{B}=(b_{ij})$ | $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}=$ $=(a_{ij}+b_{ij})$ | $\alpha \otimes \mathrm{A}=(\alpha a_{ij})$ |
| **24.** | Симметрические матриц пятого порядка: $\mathrm{A}=(a_{ij})$, $\mathrm{B}=(b_{ij})$; | $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}=$ $=(a_{ij}+b_{ij})$ | $\alpha \otimes \mathrm{A}=(\alpha a_{ij})$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **25.** | Целые числа | $x\oplus y=x+y$ | $\alpha\otimes x=[\alpha x]$ (квадратными скобками обозначена целая часть числа) |
| **26.** | Действительные числа | $x\oplus y=x+y$ | $\alpha\otimes x=\alpha x$ |
| **27.** | Положительные действительные числа | $x\oplus y=xy$ | $\alpha\otimes x=x^{\alpha}$ |
| **28.** | Отрицательные действительные числа | $x\oplus y= =-\lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert$ | $\alpha\otimes x=-\lvert x\rvert^{\alpha}$ |
| **29.** | Действительные числа | $x\oplus y=xy$ | $\alpha\otimes x=\alpha x$ |
| **30.** | Дифференцируемые функции | $f(t)\oplus g(t)= =f(t)+g(t)$ | $\alpha\otimes f(t)=\alpha\cdot f(t)$ |

**<u>Пример</u>**

Определим, образует ли линейное пространство над полем действительных чисел множество М всех дифференцируемых функций, если сумма элементов множества М определяется по формуле $f(t)\oplus g(t)=f(t)g(t)$, а произведение действительного числа α и элемента множества М определяется по формуле $\alpha\otimes f(t)=\alpha\cdot f(t)$.

1. Для линейного пространства М над полем действительных чисел должны выполняться следующие требования к операции сложения:

если $x\in M$ и $y\in M$, то $x\oplus y\in M$, причем

1.1. $x\oplus y=y\oplus x$ для любых $x, y\in M$;

1.2. $x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z$ для любых $x, y, z\in M$;

1.3. существует $O\in M$: $x\oplus O=x$ для любого $x\in M$;

1.4. для любого $x\in M$ существует $-x\in M$: $x\oplus(-x)=O$.

В данном примере $f(t)\oplus g(t)=f(t)g(t)$. Произведение дифференцируемых функций является дифференцируемой функцией. Значит, если $f(t)\in M$ и $g(t)\in M$, то $f(t)\oplus g(t)\in M$. Проверим требования 1.1.–1.4.

Поскольку $f(t)g(t)=g(t)f(t)$, то $f(t)\oplus g(t)=g(t)\oplus f(t)$ для любых $f(t)$, $g(t)\in M$. Значит, требование 1.1. выполнено.

Поскольку $f(t)(g(t)h(t))=(f(t)g(t))h(t)$, то $f(t)\oplus(g(t)\oplus h(t))=(f(t)\oplus g(t))\oplus h(t)$ для любых $f(t)$, $g(t)$, $h(t)\in M$. Значит, требование 1.2. выполнено.

Обозначим через O функцию, тождественно равную 1. Эта функция дифференцируема, то есть $O\in M$. Поскольку $f(t)\cdot 1= f(t)$, то $f(t)\oplus O=f(t)$ для любого $f(t)\in M$. Значит, требование 1.3. выполнено.

Если $f(t)\in M$, то должно быть $f(t)\oplus(-f(t))=O$, то есть $f(t)(-f(t))=1$. Значит, функция $-f(t)$ – это $(f(t))^{-1}$. Но функция $(f(t))^{-1}$ является дифференцируемой не для любой дифференцируемой функции $f(t)$. Поэтому неверно, что $-f(t)\in M$ для любого $f(t)\in M$. Значит, требование 1.4. не выполнено.

2. Для линейного пространства M над полем действительных чисел должны выполняться следующие требования к операции умножения на число:

если $x\in M$ и $\alpha\in\mathbf{R}$, то $\alpha\otimes x\in M$, причем

2.1. $\alpha\otimes(\beta\otimes x)=(\alpha\beta)\otimes x$ для любых $\alpha$, $\beta\in\mathbf{R}$, $x\in M$;
2.2. $(\alpha+\beta)\otimes x=(\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)$ для любых $\alpha$, $\beta\in\mathbf{R}$, $x\in M$;
2.3. $\alpha\otimes(x\oplus y)=(\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)$ для любых $\alpha\in\mathbf{R}$, $x$, $y\in M$;
2.4. $1\otimes x=x$ для любого $x\in M$.

В данном примере выполнение этих требований можно не проверять, поскольку уже показано, что выполняются не все требования к сложению.

**Ответ**: нет. •

**Задание 2.**

*Определить, являются ли линейно зависимыми данные векторы.*

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 2

| Вари-ант | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| **1.** | (3;2;4;7) | (4;–3;11;–2) | (–5;3;–13;1) | (7;–2;16;3) |
| **2.** | (1;1;4;2) | (1;1;–2;4) | (0;2;6;–2) | (–3;–1;3;4) |
| **3.** | (2;3;5;2) | (1;–2;1;–1) | (–1;2;–1;1) | (1;–3;2;–3) |
| **4.** | (1;0;1;0) | (–2;1;3;–7) | (3;–1;0;3) | (4;–3;1;–3) |
| **5.** | (1;2;3;1) | (2;3;1;2) | (3;1;2;–2) | (0;4;2;5) |
| **6.** | (2;3;4;1) | (–1;1;–1;3) | (3;–5;1;–13) | (3;0;3;–6) |
| **7.** | (1;2;3;–4) | (2;–1;2;5) | (2;–1;5;–4) | (2;3;–4;1) |
| **8.** | (2;3;4;1) | (3;–1;1;–2) | (–1;2;–3;4) | (5;–7;6;–7) |
| **9.** | (1;2;1;1) | (1;1;1;2) | (–3;–2;1;–3) | (–1;1;3;1) |
| **10.** | (1;2;3;4) | (2;3;4;1) | (3;4;1;2) | (7;11;11;11) |
| **11.** | (–1;–1;0;2) | (1;0;–1;–2) | (–1;–3;1;5) | (1;2;–3;–6) |
| **12.** | (2;1;1;2) | (1;3;1;3) | (1;1;5;3) | (2;5;–7;14) |
| **13.** | (–5;3;–13;1) | (7;–2;16;3) | (3;2;4;7) | (4;–3;11;–2) |
| **14.** | (0;2;6;–2) | (–3;–1;3;4) | (1;1;4;2) | (1;1;–2;4) |
| **15.** | (–1;2;–1;1) | (1;–3;2;–3) | (2;3;5;2) | (1;–2;1;–1) |
| **16.** | (3;–1;0;3) | (4;–3;1;–3) | (1;0;1;0) | (–2;1;3;–7) |
| **17.** | (3;1;2;–2) | (0;4;2;5) | (1;2;3;1) | (2;3;1;2) |
| **18.** | (2;–1;5;–4) | (2;3;–4;1) | (1;2;3;–4) | (2;–1;2;5) |
| **19.** | (–1;2;–3;4) | (5;–7;6;–7) | (2;3;4;1) | (3;–1;1;–2) |
| **20.** | (–3;–2;1;–3) | (–1;1;3;1) | (1;2;1;1) | (1;1;1;2) |
| **21.** | (3;4;1;2) | (7;11;11;11) | (1;2;3;4) | (2;3;4;1) |
| **22.** | (–1;–3;1;5) | (1;2;–3;–6) | (–1;–1;0;2) | (1;0;–1;–2) |
| **23.** | (1;1;5;3) | (2;5;–7;14) | (2;1;1;2) | (1;3;1;3) |
| **24.** | (3;–5;1;–13) | (3;0;3;–6) | (2;3;4;1) | (–1;1;–1;3) |
| **25.** | (7;–2;16;3) | (4;–3;11;–2) | (–5;3;–13;1) | (3;2;4;7) |
| **26.** | (–3;–1;3;4) | (1;1;–2;4) | (0;2;6;–2) | (1;1;4;2) |
| **27.** | (1;–3;2;–3) | (1;–2;1;–1) | (–1;2;–1;1) | (2;3;5;2) |
| **28.** | (4;–3;1;–3) | (–2;1;3;–7) | (3;–1;0;3) | (1;0;1;0) |
| **29.** | (0;4;2;5) | (2;3;1;2) | (3;1;2;–2) | (1;2;3;1) |
| **30.** | (3;0;3;–6) | (–1;1;–1;3) | (3;–5;1;–13) | (2;3;4;1) |

## Пример

Определим, являются ли линейно зависимыми векторы $\boldsymbol{a}_1=(1;2;-3;3;1)$, $\boldsymbol{a}_2=(2;-1;1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3=(-3;4;-5;1;-1)$, $\boldsymbol{a}_4=(5;0;-1;5;3)$. Для этого достаточно определить ранг матрицы, строками которой являются эти векторы: если ранг меньше числа векторов, то они линейно зависимы.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -5 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A к ступенчатому виду.

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на –2, к третьей – первую, умноженную на 3, к четвертой – первую, умноженную на –5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & 10 & -14 & 10 & 2 \\ 0 & -10 & 14 & -10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на 2, а к четвертой – вторую, умноженную на –2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычеркиваем нулевые строки и получаем ступенчатую матрицу из двух строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Значит, r(A)=2. Таким образом, ранг матрицы меньше числа векторов.

**Ответ**: векторы линейно зависимы.●

**Задание 3**.

*Найти базис и размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений.*

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 3

| | |
|---|---|
| **1.** $\begin{cases} 7x_1+2x_2-5x_3-6x_4-3x_5=0, \\ x_1+3x_2+x_3-8x_4+6x_5=0, \\ 5x_1-4x_2-5x_3+8x_4-17x_5=0. \end{cases}$ | **2.** $\begin{cases} 4x_1+x_2-7x_3+x_4+8x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3-3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-17x_4+4x_5=0. \end{cases}$ |
| **3.** $\begin{cases} 3x_1-x_2+8x_3-11x_4+3x_5=0, \\ x_1-2x_2-5x_3-4x_4=0, \\ 7x_1-4x_2+3x_3-2x_4-18x_5=0. \end{cases}$ | **4.** $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-5x_4-x_5=0, \\ x_1+4x_2-2x_3-3x_4-12x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-6x_4+3x_5=0. \end{cases}$ |
| **5.** $\begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3+4x_4+10x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3+x_4+15x_5=0, \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4+12x_5=0. \end{cases}$ | **6.** $\begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3+3x_4+x_5=0, \\ x_1-3x_2+x_3+3x_4+9x_5=0, \\ 4x_1-3x_2-5x_3+7x_4+6x_5=0. \end{cases}$ |
| **7.** $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-4x_4-3x_5=0, \\ x_1-2x_2-3x_3+x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2+7x_3+10x_4-16x_5=0. \end{cases}$ | **8.** $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4-2x_5=0, \\ 2x_1-x_2+x_3-7x_4+5x_5=0, \\ 4x_1+7x_2+5x_3+x_4-12x_5=0. \end{cases}$ |
| **9.** $\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-15x_4+10x_5=0, \\ x_1+3x_2+x_3-6x_4-9x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+2x_4+10x_5=0. \end{cases}$ | **10.** $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-5x_4+5x_5=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3-8x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3+5x_4-8x_5=0. \end{cases}$ |
| **11.** $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4-18x_5=0, \\ x_1-2x_2+3x_3+2x_4+3x_5=0, \\ x_1+6x_2-9x_3-10x_4-13x_5=0. \end{cases}$ | **12.** $\begin{cases} 5x_1-2x_2+3x_3-7x_4+4x_5=0, \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4-2x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+7x_3-2x_4+3x_5=0. \end{cases}$ |
| **13.** $\begin{cases} 7x_1+2x_2-5x_3-6x_4-3x_5=0, \\ 2x_1+6x_2-14x_4+14x_5=0, \\ 6x_1-x_2-6x_3+2x_4-9x_5=0. \end{cases}$ | **14.** $\begin{cases} 4x_1+x_2-7x_3+x_4+8x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-14x_3+18x_4+4x_5=0, \\ 3x_1-x_2-6x_3+4x_4+12x_5=0. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| **15.** $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 8x_3 - 11x_4 + 3x_5 = 0, \\ -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 9x_4 + 21x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 13x_3 - 7x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$ | **16.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$ |
| **17.** $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 10x_5 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 6x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$ | **18.** $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 8x_5 = 0. \end{cases}$ |
| **19.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 14x_4 + 13x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$ | **20.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 10x_5 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$ |
| **21.** $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 15x_4 + 10x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 - 17x_4 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 19x_5 = 0. \end{cases}$ | **22.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 10x_4 + 13x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$ |
| **23.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 - 18x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 12x_4 - 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 11x_3 - 21x_5 = 0. \end{cases}$ | **24.** $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_3 - 10x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$ |
| **25.** $\begin{cases} -4x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 23x_5 = 0, \\ -2x_1 - 6x_2 + 14x_4 - 14x_5 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 8x_4 - 17x_5 = 0. \end{cases}$ | **26.** $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 14x_4 - 8x_5 = 0, \\ -2x_1 - 4x_2 + 14x_3 - 18x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 17x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$ |
| **27.** $\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 2x_4 + 18x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - 21x_5 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 18x_5 = 0. \end{cases}$ | **28.** $\begin{cases} 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 15x_5 = 0, \\ -x_1 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$ |
| **29.** $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 12x_5 = 0. \end{cases}$ | **30.** $\begin{cases} -3x_1 + 6x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$ |

## Пример

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}.$$

Найдем общее решение системы методом Гаусса. Столбец свободных членов при этом можно не писать: нули так и останутся нулями при всех элементарных преобразованиях.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & -2 & 7 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & -7 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 26 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_5 = 0 \\ 13x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$. Общее решение:

$\begin{cases} x_1 = 5x_2 - x_5 \\ x_4 = 13x_2 + 2x_3 + x_5 \end{cases}$, $x_2$, $x_3$, $x_5$ – свободные неизвестные.

Базис пространства решений системы – это фундаментальный набор решений. Для его нахождения составим таблицу, имеющую пять столбцов (столько, сколько неизвестных) и три строки (столько, сколько свободных неизвестных). В первой строке $x_2$=1, $x_3$=$x_5$=0; во второй строке $x_3$=1, $x_2$=$x_5$=0; в третьей строке $x_5$=1, $x_2$=$x_3$=0; $x_1$ и $x_4$ находим по формулам общего решения.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{f}_1$ | 5 | **1** | **0** | 13 | **0** |
| $\bar{f}_2$ | 0 | **0** | **1** | 2 | **0** |
| $\bar{f}_3$ | –1 | **0** | **0** | 1 | **1** |

Итак, $\bar{f}_1$= (5,1,0,13,0), $\bar{f}_2$= (0,0,1,2,0), $\bar{f}_3$= (–1,0,0,1,1) – фундаментальный набор решений. Всякое решение системы является линейной комбинацией $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ и $\bar{f}_3$:

$\bar{x}$ = (5$x_2$–$x_5$; $x_2$; $x_3$; 13$x_2$+2$x_3$+$x_5$; $x_5$) = $x_2\,\bar{f}_1$+$x_3\,\bar{f}_2$+$x_5\,\bar{f}_3$.

**Ответ**: $\bar{f}_1 = (5,1,0,13,0)$, $\bar{f}_2 = (0,0,1,2,0)$, $\bar{f}_3 = (-1,0,0,1,1)$.•

**Задание 4**.

*Найти координаты вектора* $\boldsymbol{x}$ *базисе* $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, *если он задан в базисе* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 4

| Вариант | $\boldsymbol{g}_1$ | $\boldsymbol{g}_2$ | $\boldsymbol{g}_3$ | $\boldsymbol{x}$ |
|---|---|---|---|---|
| **1.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$ | $2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (6,–1,3) |
| **2.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$ | $1{,}5\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (1,2,4) |
| **3.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_3$ | $\frac{4}{3}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (1,3,6) |
| **4.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+1{,}5\boldsymbol{e}_3$ | $3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (2,4,1) |
| **5.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\frac{4}{3}\boldsymbol{e}_3$ | $4\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (6,3,1) |
| **6.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3$ | $1{,}25\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (1,4,8) |
| **7.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+1{,}25\boldsymbol{e}_3$ | $5\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (8,4,1) |
| **8.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+6\boldsymbol{e}_3$ | $1{,}2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (2,5,10) |
| **9.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+1{,}2\boldsymbol{e}_3$ | $6\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (10,5,1) |
| **10.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+7\boldsymbol{e}_3$ | $\frac{7}{6}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (1,6,12) |
| **11.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\frac{7}{6}\boldsymbol{e}_3$ | $7\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (–12,6,1) |
| **12.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+8\boldsymbol{e}_3$ | $\frac{8}{7}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (–1,7,14) |
| **13.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ | $0{,}5\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (–3,2,4) |
| **14.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+0{,}5\boldsymbol{e}_3$ | $-\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (2,4,3) |
| **15.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$ | $\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (2,6,–3) |
| **16.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_3$ | $-2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (12,3,–1) |
| **17.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$ | $0{,}75\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (1,–4,8) |
| **18.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$ | $0{,}75\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (1,4,–8) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **19.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3$ | $0{,}8\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (7,–5,10) |
| **20.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+0{,}8\boldsymbol{e}_3$ | $-4\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (5,–5,–4) |
| **21.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-5\boldsymbol{e}_3$ | $\frac{5}{6}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (1,–6,6) |
| **22.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\frac{5}{6}\boldsymbol{e}_3$ | $-5\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (6,6,2) |
| **23.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_3$ | $\frac{6}{7}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (1,7,–7) |
| **24.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\frac{6}{7}\boldsymbol{e}_3$ | $-6\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (7,7,2) |
| **25.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-7\boldsymbol{e}_3$ | $\frac{7}{8}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (3,–8,8) |
| **26.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-8\boldsymbol{e}_3$ | $\frac{8}{9}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (1,–9,9) |
| **27.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\frac{8}{9}\boldsymbol{e}_3$ | $-8\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (9,9,2) |
| **28.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-9\boldsymbol{e}_3$ | $0{,}9\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (3,–10,10) |
| **29.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+0{,}9\boldsymbol{e}_3$ | $-9\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (10,10,7) |
| **30.** | $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+10\boldsymbol{e}_3$ | $\frac{10}{9}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ | $-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ | (1,9,18) |

## Пример

$\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+11\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{g}_2=1{,}1\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{g}_3=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{x}=(1,10,10)$.

Сначала запишем матрицу перехода Т от базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ к базису $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$. Столбцы матрицы Т – это координаты векторов нового базиса в старом базисе. Значит,

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix} 1 & 1{,}1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 11 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в новом базисе определяются по формуле: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}=\mathrm{T}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу $\mathrm{T}^{-1}$:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1{,}1 & -0{,}1 \\ -10 & -12 & 2 \\ -11 & -12{,}1 & 2{,}1 \end{pmatrix}.$$

Тогда координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в новом базисе:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1{,}1 & -0{,}1 \\ -10 & -12 & 2 \\ -11 & -12{,}1 & 2{,}1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ -110 \\ -111 \end{pmatrix}.$$

**Ответ**: (11, –110, –111). ●

## Задание 5.

*Пусть* $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. *Определить, являются ли линейными следующие преобразования пространства* $\mathbf{R}^3$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 5

| Вариант | **Формулы преобразований** |
|---|---|
| **1.** | $f(\bar{x})=(2x_1+x_2, 3x_2-4x_3, x_1-2x_2+x_3)$;<br>$g(\bar{x})=(3x_1-x_2+x_3, x_2^2, 2x_1+x_3)$;<br>$h(\bar{x})=(x_1-3,5-x_2+x_3, 2x_2)$. |
| **2.** | $f(\bar{x})=(5x_1+3x_2-x_3, x_2, x_1-x_3)$;<br>$g(\bar{x})=(5x_1+3x_2-1, x_3, x_1-x_3)$;<br>$h(\bar{x})=(5x_1^2+3x_2-x_3, x_2, x_1-x_3)$. |
| **3.** | $f(\bar{x})=(x_2-x_3, 2x_1+x_2+3x_3, x_3)$;<br>$g(\bar{x})=(x_2^2-x_3, 2x_1+x_2, x_3-x_2)$;<br>$h(\bar{x})=(x_2-x_3, 2x_1+x_2+2x_3, x_3+1)$. |
| **4.** | $f(\bar{x})=(x_1, x_2+x_3, x_1+x_2+x_3)$;<br>$g(\bar{x})=(x_1, x_2+x_3, x_1+x_2+1)$;<br>$h(\bar{x})=(x_1, x_2+x_3, x_1+x_2+x_3^2)$. |

| | |
|---|---|
| **5.** | $f(\bar{x})=(x_1+x_2,\ x_2+x_3,\ x_1+x_3+1);$<br>$g(\bar{x})=(x_1+x_2,\ x_2+x_3,\ x_1+x_2^2+x_3);$<br>$h(\bar{x})=(x_1+x_2,\ x_2+x_3,\ x_1+x_3).$ |
| **6.** | $f(\bar{x})=(x_1+2x_2+3x_3,\ x_1+2x_2,\ 2x_2+3x_3);$<br>$g(\bar{x})=(x_1+2x_2+3x_3,\ x_1+2x_2,\ 2x_2+3);$<br>$h(\bar{x})=(x_1+2x_2+3x_3,\ x_1+2x_2,\ 2x_2+3x_3^2).$ |
| **7.** | $f(\bar{x})=(5x_1+3x_2+x_3,\ 2x_2-3x_3,\ x_3);$<br>$g(\bar{x})=(5x_1+3x_2+x_3^2,\ 2x_2-3x_3,\ x_3);$<br>$h(\bar{x})=(5x_1+3x_2+1,\ 2x_2-3x_3,\ x_3).$ |
| **8.** | $f(\bar{x})=(0,\ x_1-2x_2+3x_3,\ 4x_1-5x_2+6x_3);$<br>$g(\bar{x})=(0,\ x_1^2-2x_2+3x_3,\ 4x_1-5x_2+6x_3);$<br>$h(\bar{x})=(0,\ x_1-2x_2+3x_3,\ 4x_1-5x_2+6).$ |
| **9.** | $f(\bar{x})=(2x_1-x_2,\ x_2^2,\ x_1-2x_2+x_3);$<br>$g(\bar{x})=(2x_1-x_2,\ x_2,\ x_1-2x_2+x_3);$<br>$h(\bar{x})=(2x_1-2,\ x_2,\ x_1-2x_2+x_3).$ |
| **10.** | $f(\bar{x})=(x_2,\ x_3-x_1,\ x_2+x_3+1);$<br>$g(\bar{x})=(x_2,\ x_3-x_1^2,\ x_2+x_3);$<br>$h(\bar{x})=(x_2,\ x_3-x_1,\ x_2+x_3).$ |
| **11.** | $f(\bar{x})=(x_2-x_3,\ 1-x_1,\ x_1+2x_2-x_3);$<br>$g(\bar{x})=(x_1+x_2-x_3,\ x_1+x_3,\ 2x_1-x_2+x_3);$<br>$h(\bar{x})=(x_1^2+x_2,\ x_1-x_3,\ x_1+2x_2+3x_3).$ |
| **12.** | $f(\bar{x})=(x_2-4x_3,\ x_1-5x_3,\ x_3);$<br>$g(\bar{x})=(x_2-4x_3,\ x_1^2-5x_3,\ x_3);$<br>$h(\bar{x})=(x_2-4x_3,\ x_1+2,\ x_1+2x_2).$ |
| **13.** | $f(\bar{x})=(x_1,\ x_1+x_2,\ x_1+2x_2+3x_3);$<br>$g(\bar{x})=(x_1^2,\ x_1+x_2,\ x_1+2x_2+3x_3);$<br>$h(\bar{x})=(x_1,\ x_1+2,\ x_1+2x_2+3x_3).$ |
| **14.** | $f(\bar{x})=(x_1-2x_2+1,\ x_2,\ x_2-3x_3);$<br>$g(\bar{x})=(x_1-2x_2+x_3,\ x_2,\ x_2-3x_3);$<br>$h(\bar{x})=(x_1-2x_2+x_3,\ x_2^2,\ x_2-3x_3).$ |

| | |
|---|---|
| **15.** | $f(\bar{x})=(3x_1+2x_2,\, x_1-2x_2,\, x_3);$<br>$g(\bar{x})=(3x_1+2x_2,\, x_1-2,\, x_3);$<br>$h(\bar{x})=(3x_1+2x_2,\, x_1-2x_2^2,\, x_3).$ |
| **16.** | $f(\bar{x})=(4x_1+3x_2+2x_3,\, 3x_2+2x_3,\, x_3);$<br>$g(\bar{x})=(4x_1+3x_2+2,\, 3x_2+2x_3,\, x_3);$<br>$h(\bar{x})=(4x_1+3x_2+2x_3,\, 3x_2+2x_3,\, x_3^2).$ |
| **17.** | $f(\bar{x})=(3x_1+2x_2-x_3,\, 3x_2+2x_3,\, 3x_3);$<br>$g(\bar{x})=(3x_1+2x_2,\, 3x_2+2,\, 3x_3);$<br>$h(\bar{x})=(3x_1+2x_2-x_3,\, 3x_2+2x_3,\, x_3^2).$ |
| **18.** | $f(\bar{x})=(x_1-x_2,\, 2x_1+4x_2,\, x_3);$<br>$g(\bar{x})=(x_1-x_2^2,\, 2x_1+4x_2,\, x_3);$<br>$h(\bar{x})=(x_1-2,\, 2x_1+4x_2,\, x_3).$ |
| **19.** | $f(\bar{x})=(4x_1-3x_2^2,\, 3x_2-2x_3,\, 2x_1-x_3);$<br>$g(\bar{x})=(4x_1-3,\, 3x_2-2x_3,\, 2x_1-x_3);$<br>$h(\bar{x})=(4x_1-3x_2,\, 3x_2-2x_3,\, 2x_1-x_3).$ |
| **20.** | $f(\bar{x})=(x_1-x_2,\, 2x_2-x_3,\, 3x_1-x_3);$<br>$g(\bar{x})=(x_1-x_2+1,\, 2x_2-x_3,\, 3x_1-x_3);$<br>$h(\bar{x})=(x_1-x_2,\, 2x_2-x_3^2,\, 3x_1).$ |
| **21.** | $f(\bar{x})=(2x_1+x_2-2x_3,\, x_2-2x_3,\, 2x_3);$<br>$g(\bar{x})=(2x_1+x_2-2x_3,\, x_2^2-2x_3,\, 2x_3);$<br>$h(\bar{x})=(2x_1+x_2-2,\, x_2-2x_3,\, 2x_3).$ |
| **22.** | $f(\bar{x})=(7x_2-3x_3,\, x_1+5x_2+1,\, x_3);$<br>$g(\bar{x})=(7x_2-3x_3,\, x_1+5x_2,\, x_3^2);$<br>$h(\bar{x})=(7x_2-3x_3,\, x_1+5x_2,\, x_3).$ |
| **23.** | $f(\bar{x})=(3x_1+2x_2,\, x_2,\, 0);$<br>$g(\bar{x})=(3x_1+2x_2,\, 1,\, 0);$<br>$h(\bar{x})=(3x_1+2x_2,\, x_2^2,\, 0).$ |
| **24.** | $f(\bar{x})=(5x_2+x_3,\, x_2,\, x_1-3x_2);$<br>$g(\bar{x})=(5x_2+x_3,\, x_2,\, x_1^2-3x_2);$<br>$h(\bar{x})=(5x_2+x_3,\, x_2,\, x_1-3).$ |

| | |
|---|---|
| **25.** | $f(\overline{x})=(x_1-x_2,\, x_1-x_3,\, x_2-x_3);$<br>$g(\overline{x})=(x_1-x_2,\, x_1-3,\, x_2-x_3);$<br>$h(\overline{x})=(x_1^2-x_2,\, x_1-x_3,\, x_2-x_3).$ |
| **26.** | $f(\overline{x})=(x_2-3x_3,\, x_1-2x_2,\, x_3-x_1);$<br>$g(\overline{x})=(x_2^2-3x_3,\, x_1-2x_2,\, x_3-x_1);$<br>$h(\overline{x})=(x_2-3x_3, 1-2x_2,\, x_3-x_1).$ |
| **27.** | $f(\overline{x})=(2x_1+3x_2+4x_3, 3x_1+4x_2, 2x_1+x_3);$<br>$g(\overline{x})=(2x_1+3x_2+4x_3, 3+4x_2, 2x_1+x_3);$<br>$h(\overline{x})=(2x_1^2+3x_2+4x_3, 3x_1+4x_2, 2x_1+x_3).$ |
| **28.** | $f(\overline{x})=(4x_1^2-5x_2, 3x_1-4x_2, 2x_1-3x_2);$<br>$g(\overline{x})=(4x_1-5x_2, 3x_1-4x_2, 2x_1-3x_2);$<br>$h(\overline{x})=(4x_1-5x_2, 3x_1-4, 2x_1-3x_2).$ |
| **29.** | $f(\overline{x})=(3x_1-x_2, 5x_1+x_2-x_3,\, x_3^2);$<br>$g(\overline{x})=(3x_1-2, 5x_1+x_2-x_3,\, x_3);$<br>$h(\overline{x})=(3x_1-x_2, 5x_1+x_2-x_3,\, x_3).$ |
| **30.** | $f(\overline{x})=(x_1^2,\, x_1+2x_2,\, x_1+2x_2+3x_3);$<br>$g(\overline{x})=(x_1,\, x_1+2x_2,\, x_1+2x_2+3x_3);$<br>$h(\overline{x})=(x_1,\, x_1+2,\, x_1+2x_2+3x_3).$ |

## Пример

$f(\overline{x})=(x_1,\, x_2+x_3, 1+x_2+x_3);$

$g(\overline{x})=(2x_3-x_1, 0, 3x_1+2x_2-x_3);$

$h(\overline{x})=(0, 4x_2-x_3-5x_1,\, x_1-2x_3^2).$

Чтобы убедиться, что данное преобразование $f$ является линейным, надо проверить, что для любых векторов $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)$ и $\overline{y}=(y_1,y_2,y_3)$ и любых чисел α и β выполняется равенство: $f(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y})=\alpha f(\overline{x})+\beta f(\overline{y})$.

Проверим это требование для преобразования $f$.

$f(\overline{x})=(x_1,\, x_2+x_3, 1+x_2+x_3)$,

$f(\overline{y})=(y_1,\, y_2+y_3, 1+y_2+y_3)$,

$$\alpha f(\bar{x})+\beta f(\bar{y})=$$
$$(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha(x_2+x_3)+\beta(y_2+y_3), \alpha(1+x_2+x_3)+\beta(1+y_2+y_3)).$$

---

$$\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}=(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3),$$
$$f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})=$$
$$(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2+\alpha x_3+\beta y_3, 1+\alpha x_2+\beta y_2+\alpha x_3+\beta y_3).$$

---

Таким образом, у векторов $\alpha f(\bar{x})+\beta f(\bar{y})$ и $f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})$ совпадают первые и вторые координаты. Сравним их третьи координаты:
$\alpha(1+x_2+x_3)+\beta(1+y_2+y_3)$ и $1+\alpha x_2+\beta y_2+\alpha x_3+\beta y_3$. Эти числа совпадают только в том случае, когда $\alpha+\beta=1$, то есть не всегда. Значит, равенство $f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})=\alpha f(\bar{x})+\beta f(\bar{y})$ выполняется не при всех $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\alpha$ и $\beta$. Поэтому **преобразование *f* не является линейным**.

Проверим то же требование для преобразования $g$.

$$g(\bar{x})=(2x_3-x_1, 0, 3x_1+2x_2-x_3),$$
$$g(\bar{y})=(2y_3-y_1, 0, 3y_1+2y_2-y_3),$$
$$\alpha g(\bar{x})+\beta g(\bar{y})=$$
$$(\alpha(2x_3-x_1)+\beta(2y_3-y_1), 0, \alpha(3x_1+2x_2-x_3)+\beta(3y_1+2y_2-y_3)).$$

---

$$\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}=(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3),$$
$$g(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})=$$
$$(2\alpha x_3+2\beta y_3-\alpha x_1-\beta y_1, 0, 3\alpha x_1+3\beta y_1+2\alpha x_2+2\beta y_2-\alpha x_3-\beta y_3).$$

---

Таким образом, у векторов $\alpha g(\bar{x})+\beta g(\bar{y})$ и $g(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})$ совпадают все координаты, то есть эти векторы равны. Значит, равенство $g(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})=\alpha \mathrm{g}(\bar{x})+\beta \mathrm{g}(\bar{y})$ выполняется при всех $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\alpha$ и $\beta$. Поэтому **преобразование *g* является линейным**.

Проверим это требование для преобразования *h*.

$h(\bar{x})=(0, 4x_2-x_3-5x_1, x_1-2x_3^2)$,

$h(\bar{y})=(0, 4y_2-y_3-5y_1, y_1-2y_3^2)$,

$\alpha h(\bar{x})+\beta h(\bar{y})=$

$(0, \alpha(4x_2-x_3-5x_1)+\beta(4y_2-y_3-5y_1), \alpha(x_1-2x_3^2)+\beta(y_1-2y_3^2))$.

---

$\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}=(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3)$,

$h(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})=$

$(0, 4\alpha x_2+4\beta y_2-\alpha x_3-\beta y_3-5\alpha x_1-5\beta y_1, \alpha x_1+\beta y_1-2(\alpha x_3+\beta y_3)^2)$.

---

Таким образом, у векторов $\alpha h(\bar{x})+\beta h(\bar{y})$ и $h(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})$ совпадают первые и вторые координаты. Сравним их третьи координаты:

$\alpha(x_1-2x_3^2)+\beta(y_1-2y_3^2)=\alpha x_1-2\alpha x_3^2+\beta y_1-2\beta y_3^2$ и

$\alpha x_1+\beta y_1-2(\alpha x_3+\beta y_3)^2=\alpha x_1+\beta y_1-2\alpha^2 x_3^2-4\alpha\beta x_3 y_3-2\beta^2 y_3^2$.

Эти числа совпадают только в том случае, когда $\alpha x_3^2+\beta y_3^2=\alpha^2 x_3^2+2\alpha\beta x_3 y_3+\beta^2 y_3^2$, то есть не всегда. Значит, равенство $h(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})=\alpha h(\bar{x})+\beta h(\bar{y})$ выполняется не при всех $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\alpha$ и $\beta$. Поэтому **преобразование *h* не является линейным**.

**Ответ**: линейным является преобразование $g$; преобразования $f$ и $h$ линейными не являются.•

**Задание 6.**

*Пусть* $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $A\mathbf{x}=(x_2-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $B\mathbf{x}=(x_2,2x_3,x_1)$. *Найти* $f(\mathbf{x})$ *для данного линейного оператора* $f$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 6

| Вариант | *f* | Вариант | *f* | Вариант | *f* |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | AB | **2.** | $A^2$ | **3.** | $A^2-B$ |
| **4.** | $B^4$ | **5.** | $2A+3B^2$ | **6.** | $A^2+B^2$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **7.** | $(A-B)^2$ | **8.** | BA | **9.** | $2(B+2A^2+B^2)$ |
| **10.** | B(A–B) | **11.** | $B^2+A$ | **12.** | $B-2A^2$ |
| **13.** | $3A^2+B$ | **14.** | $A^2+B$ | **15.** | $A^2-B^2$ |
| **16.** | $2B-A^2$ | **17.** | B(2A–B) | **18.** | A(B+A) |
| **19.** | $AB^2$ | **20.** | A(B–A) | **21.** | 2(AB+2A) |
| **22.** | $B-A+B^2$ | **23.** | $B^3$ | **24.** | $B^2$ |
| **25.** | A+BA–B | **26.** | $B^2-2A$ | **27.** | $BA^2$ |
| **28.** | B(A+B) | **29.** | A(2B–A) | **30.** | $3B+2A^2$ |

## Пример

*f*=B(2A+B). Сначала запишем матрицы операторов A и B в том базисе, в котором задан вектор $\boldsymbol{x}$. Для этого найдем A$\boldsymbol{e}_1$, A$\boldsymbol{e}_2$, A$\boldsymbol{e}_3$, B$\boldsymbol{e}_1$, B$\boldsymbol{e}_2$, B$\boldsymbol{e}_3$, где $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ – этот базис. Имеем: A$\boldsymbol{e}_1$=(0,1,1), A$\boldsymbol{e}_2$=(1,0,0), A$\boldsymbol{e}_3$=(–1,0,1); B$\boldsymbol{e}_1$=(0,0,1), B$\boldsymbol{e}_2$=(1,0,0), B$\boldsymbol{e}_3$=(0,2,0). Значит,

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу оператора *f*:

$$M_f=B(2A+B)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\cdot0+0&2\cdot1+1&2\cdot(-1)+0\\2\cdot1+0&2\cdot0+0&2\cdot0+2\\2\cdot1+1&2\cdot0+0&2\cdot1+0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&-2\\2&0&2\\3&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\6&0&4\\0&3&-2\end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда } f(\boldsymbol{x})=M_f\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2&0&2\\6&0&4\\0&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+2x_3\\6x_1+4x_3\\3x_2-2x_3\end{pmatrix}.$$

**Ответ**: $f(\boldsymbol{x})=(2x_1+2x_3,\ 6x_1+4x_3,\ 3x_2-2x_3)$. ●

**<u>Задание 7.</u>**

*Доказать, что преобразование f пространства* $\mathbf{R}^3$ *является линейным и найти его матрицу в том же базисе, в котором заданы координаты векторов* $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$ *и* $f(\bar{x})$. *Найти ранг и дефект преобразования.*

<u>ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 12</u>

| Вариант | **Формула преобразования** |
|---|---|
| **1.** | $f(\bar{x})=(x_2+x_3, x_1+x_2, x_1+x_3)$ |
| **2.** | $f(\bar{x})=(x_1+x_2+x_3, x_3, x_1-x_2)$ |
| **3.** | $f(\bar{x})=(2x_1+x_2, 2x_2+x_3, 2x_3)$ |
| **4.** | $f(\bar{x})=(4x_1-x_3, x_3-x_2, x_1+x_2)$ |
| **5.** | $f(\bar{x})=(x_1-2x_2+x_3, x_3, x_1+x_2)$ |
| **6.** | $f(\bar{x})=(x_1-x_3, 2x_1+x_2, x_2)$ |
| **7.** | $f(\bar{x})=(x_1-2x_3, x_1+x_2-x_3, x_1+x_2)$ |
| **8.** | $f(\bar{x})=(2x_1-x_3, x_2+2x_3, x_2-x_3)$ |
| **9.** | $f(\bar{x})=(x_1+x_2, x_1-x_2+2x_3, x_1+x_2)$ |
| **10.** | $f(\bar{x})=(-x_1+x_2, x_1+x_2, x_3)$ |
| **11.** | $f(\bar{x})=(x_2, 3x_1+x_2-x_3, x_2+x_3)$ |
| **12.** | $f(\bar{x})=(4x_1+x_2, 4x_2+x_3, 4x_1+x_3)$ |
| **13.** | $f(\bar{x})=(x_1-x_2+x_3, x_2+3x_3, x_3)$ |
| **14.** | $f(\bar{x})=(x_1+3x_2, x_2+3x_3, -2x_2)$ |
| **15.** | $f(\bar{x})=(x_1+x_3, 4x_1+x_2, 3x_1)$ |
| **16.** | $f(\bar{x})=(2x_1-x_2, 3x_3, 2x_1+x_2+x_3)$ |
| **17.** | $f(\bar{x})=(3x_1-x_2, x_1+x_3, x_2+x_3)$ |
| **18.** | $f(\bar{x})=(2x_2+x_3, x_3, x_1-2x_3)$ |
| **19.** | $f(\bar{x})=(x_1-x_2+x_3, 3x_1+x_3, x_2-3x_3)$ |
| **20.** | $f(\bar{x})=(2x_1-x_3, x_2+5x_3, x_2)$ |
| **21.** | $f(\bar{x})=(x_1+5x_2, x_2-2x_3, x_1+4x_3)$ |

| | |
|---|---|
| **22.** | $f(\bar{x})=(x_1+4x_3,2x_1+x_2,x_3)$ |
| **23.** | $f(\bar{x})=(7x_1-x_2,x_2+x_3,x_2+7x_3)$ |
| **24.** | $f(\bar{x})=(x_1-3x_2+x_3,x_1+x_2,x_3)$ |
| **25.** | $f(\bar{x})=(3x_1-4x_2,x_1+3x_2,x_2-7x_3)$ |
| **26.** | $f(\bar{x})=(2x_1-x_3,x_1+x_3,x_2+x_3)$ |
| **27.** | $f(\bar{x})=(-x_1+5x_2,x_2-5x_3,x_3)$ |
| **28.** | $f(\bar{x})=(x_3,x_1+3x_2+5x_3,x_2-x_3)$ |
| **29.** | $f(\bar{x})=(3x_1-x_3,3x_2-5x_3,x_2+7x_3)$ |
| **30.** | $f(\bar{x})=(x_1-x_3,x_2-4x_3,x_2)$ |

## Пример

$f(\bar{x})=(3x_1-x_2+5x_3,0,2x_2-x_3)$

1)Чтобы убедиться, что преобразование $f$ является линейным, надо проверить, что для любых векторов $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$ и $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)$ и любых чисел α и β выполняется равенство: $f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})=\alpha f(\bar{x})+\beta f(\bar{y})$.

Проверим это требование.

$f(\bar{x})=(3x_1-x_2+5x_3,0,2x_2-x_3)$, $f(\bar{y})=(3y_1-y_2+5y_3,0,2y_2-y_3)$,

$\alpha f(\bar{x})+\beta f(\bar{y})=$

$(\alpha(3x_1-x_2+5x_3)+\beta(3y_1-y_2+5y_3),0,\alpha(2x_2-x_3)+\beta(2y_2-y_3))$.

---

$\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3)$,

$f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})=$

$(3\alpha x_1+3\beta y_1-\alpha x_2-\beta y_2+5\alpha x_3+5\beta y_3,0,2\alpha x_2+2\beta y_2-\alpha x_3-\beta y_3)$.

---

Таким образом, у векторов $\alpha f(\bar{x})+\beta f(\bar{y})$ и $f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})$ совпадают все координаты. Значит, равенство $f(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})=$ $=\alpha f(\bar{x})+\beta f(\bar{y})$ выполняется при всех $\bar{x}$, $\bar{y}$, α и β. Поэтому преобразование $f$ является линейным.

2)Чтобы записать матрицу преобразования $f$, нужно найти $f(\overline{e_1})$, $f(\overline{e_2})$ и $f(\overline{e_3})$, где $\overline{e_1}$ = (1,0,0), $\overline{e_2}$ = (0,1,0), $\overline{e_3}$ = (0,0,1) – базисные векторы.

Из формулы $f(\overline{x}) = (3x_1 - x_2 + 5x_3, 0, 2x_2 - x_3)$ получаем: $f(\overline{e_1})$ =(3–0+0,0,0–0)=(3,0,0), $f(\overline{e_2})$ =(0–1+0,0,2–0)=(–1,0,2), $f(\overline{e_3})$ =(0–0+5,0,0–1)=(5,0,–1).

Теперь записываем матрицу преобразования – ее столбцами являются координаты векторов $f(\overline{e_1})$, $f(\overline{e_2})$ и $f(\overline{e_3})$:

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг преобразования $f$ – это ранг матрицы $A_f$. Если вычеркнуть из этой матрицы нулевую строку, получится ступенчатая матрица $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, имеющая 2 строки. Значит, ранг преобразования $f$ равен 2.

Чтобы найти дефект преобразования $f$, воспользуемся тем, что сумма ранга и дефекта преобразования пространства $\mathbf{R}^3$равна 3. А поскольку ранг равен 2, то дефект равен 1.

**Ответ**: $A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, ранг $f$ равен 2, дефект $f$ равен 1.•

**Задание 8.**

*Матрица линейного преобразования f пространства* $\mathbf{R}^3$ *задана в базисе* $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. *Найти его матрицу в базисе* $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$, *если* $\bar{g}_1 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{g}_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\bar{g}_3 = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_3$.

# ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 8

| Вариант | $A_f$ | Вариант | $A_f$ | Вариант | $A_f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ | **2.** | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -7 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ | **3.** | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **4.** | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ | **5.** | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | **6.** | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **7.** | $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ | **8.** | $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | **9.** | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **10.** | $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | 11. | $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ | **12.** | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **13.** | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | **14.** | $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | **15.** | $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **16.** | $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | **17.** | $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | **18.** | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **19.** | $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | **20.** | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | **21.** | $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **22.** | $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | **23.** | $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ | **24.** | $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **25.** | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | **26.** | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | **27.** | $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **28.** | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | **29.** | $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | **30.** | $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ |

**Пример**

$A_f = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ в базисе $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Найти матрицу линейного преобразования $f$ в базисе $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$, если $\bar{g}_1 = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3,\ \bar{g}_2 = 3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3,\ \bar{g}_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$.

Матрица линейного преобразования $f$ в базисе $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ имеет вид $T^{-1}A_fT$, где T – матрица перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ к базису $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$. Столбцами матрицы перехода являются координаты векторов $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ в базисе $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Поэтому $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем матрицу $T^{-1}$.

$|T| = 2\cdot4\cdot2+3\cdot2\cdot1+3\cdot1\cdot1-(1\cdot4\cdot1+2\cdot2\cdot1+3\cdot3\cdot2) = 25 - 26 = -1.$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2,$

$A_{12}= -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$, $A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $A_{32}= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{23}= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} -1$.

Итак, $T^{-1}= -\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда $T^{-1}A_fT=$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 8 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Ответ**: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.•

**Задание 9.**
*Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.*

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 9

| Вариант | A | Вариант | A | Вариант | A |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ | **2.** | $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ | **3.** | $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **4.** | $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ | **5.** | $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | **6.** | $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **7.** | $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | **8.** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ | **9.** | $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **10.** | $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | **11.** | $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ | **12.** | $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ |
| **13.** | $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ | **14.** | $\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ | **15.** | $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **16.** | $\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ | **17.** | $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ | **18.** | $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **19.** | $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 8 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ | **20.** | $\begin{pmatrix} 8 & -7 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | **21.** | $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **22.** | $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | **23.** | $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ | **24.** | $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **25.** | $\begin{pmatrix} 8 & -5 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | **26.** | $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ | **27.** | $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ |
| **28.** | $\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ | **29.** | $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ | **30.** | $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ |

## Пример

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Чтобы найти собственные значения, нужно составить и решить характеристическое уравнение матрицы А: $|A–\lambda E|$ =0.

$$|A–\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = –\lambda(\lambda^2–1) – 1(–\lambda–1) + 1(1+\lambda) =$$

$= –\lambda(\lambda–1)(\lambda+1)+(\lambda+1)+(\lambda+1) = (\lambda+1)(–\lambda^2+\lambda+1+1) =$
$= (\lambda+1)(–\lambda^2+\lambda+2)$. Получаем характеристическое уравнение: $(\lambda+1)(–\lambda^2+\lambda+2)=0$. Его корни $\lambda_1= –1$ и $\lambda_2=2$ являются собственными значениями матрицы. Найдем для каждого из них собственные векторы.

1)Пусть $\lambda= –1$. Тогда $A–\lambda E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и собственные векторы – ненулевые решения системы $(A–\lambda E)\bar{x} = \bar{0}$. Эта система равносильна одному уравнению $x_1+x_2+x_3=0$, то есть $x_3 = –x_1–x_2$. Тогда общее решение системы можно записать в виде: $\bar{x}$ =(α,β,–α–β); если $\bar{x} \neq \bar{0}$, то α и β не могут быть одновременно равны нулю. Значит, собственные векторы, соответствующие собственному значению –1, имеют вид: $\bar{x}$ = (α,β,–α–β), где $\alpha^2+\beta^2\neq0$. Иначе можно записать так:
$\bar{x} = \alpha(1,0,–1)+ \beta(0,1,–1)$, где $\alpha^2+\beta^2\neq0$.

2)Пусть $\lambda=2$. Тогда $A–\lambda E=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; система

$(A–\lambda E)\bar{x}=\bar{0}$ имеет вид $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$. Решаем систему методом Гаусса: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Получаем равносильную систему $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0 \\ -3x_2+3x_3=0 \end{cases}$.

Общее решение системы: $\bar{x}=(\alpha,\alpha,\alpha)$. Значит, собственные векторы, соответствующие собственному значению 2, имеют вид: $\bar{x}=(\alpha,\alpha,\alpha)$, где $\alpha\neq 0$. Иначе можно записать так: $\bar{x}=\alpha(1,1,1)$, где $\alpha\neq 0$.

**Ответ**: собственные значения –1 (собственные векторы $\bar{x}=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)$, где $\alpha^2+\beta^2\neq 0$) и 2 ($\bar{x}=\alpha(1,1,1)$, где $\alpha\neq 0$). •

## Задание 10.

*Найти ортогональный базис линейной оболочки векторов* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ *и* $\boldsymbol{a}_3$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 10

| Вариант | $\boldsymbol{a}_1$ | $\boldsymbol{a}_2$ | $\boldsymbol{a}_3$ |
|---|---|---|---|
| **1.** | (1;0;1) | (1;1;0) | (1;0;–1) |
| **2.** | (–2;1;2) | (0;–2;–1) | (2;1;–2) |
| **3.** | (–1;1;1) | (–1;–1;1) | (–1;–1;–1) |
| **4.** | (1;–1;1) | (1;1;–1) | (1;1;1) |
| **5.** | (–2;0;2) | (1;–2;1) | (2;–1;–2) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **6.** | (1;1;1) | (–1;1;1) | (1;–1;1) |
| **7.** | (1;1;1) | (1;1;2) | (1;2;3) |
| **8.** | (1;3;1) | (0;3;0) | (3;0;–3) |
| **9.** | (2;3;4) | (1;–2;1) | (1;2;3) |
| **10.** | (2;1;2) | (–1;2;1) | (2;–1;2) |
| **11.** | (2;–1;2) | (1;2;–1) | (2;1;2) |
| **12.** | (2;5;1) | (4;–2;2) | (4;1;3) |
| **13.** | (1;0;1) | (0;0;2) | (0;–1;1) |
| **14.** | (–2;1;2) | (–4;0;4) | (–2;3;3) |
| **15.** | (–1;1;1) | (0;2;2) | (0;2;0) |
| **16.** | (1;–1;1) | (0;–2;0) | (0;–2;2) |
| **17.** | (–2;0;2) | (–4;1;4) | (–3;2;1) |
| **18.** | (1;1;1) | (0;2;0) | (2;0;0) |
| **19.** | (1;1;1) | (0;–1;–2) | (0;0;–1) |
| **20.** | (1;3;1) | (–2;3;4) | (1;0;–1) |
| **21.** | (2;3;4) | (1;1;1) | (1;5;3) |
| **22.** | (2;1;2) | (0;2;0) | (3;–1;1) |
| **23.** | (2;–1;2) | (0;–2;0) | (1;–3;3) |
| **24.** | (2;5;1) | (–2;4;–2) | (–2;7;–1) |
| **25.** | (0;1;1) | (1;1;0) | (0;0;–2) |
| **26.** | (–2;–3;1) | (0;–2;–1) | (4;0;–4) |
| **27.** | (0;0;2) | (0;–2;–2) | (–1;–1;–1) |
| **28.** | (0;0;2) | (0;2;0) | (1;1;1) |
| **29.** | (–1;–1;3) | (4;–1;–4) | (2;–1;–2) |
| **30.** | (–2;2;0) | (0;–2;0) | (1;–1;1) |

## Пример

Найдем ортогональный базис линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a}_1$=(2,1,3,–1), $\boldsymbol{a}_2$=(7,4,3,–3), $\boldsymbol{a}_3$=(1,1,–6,0), $\boldsymbol{a}_4$=(5,7,7,8). Для этого применим процесс ортогонализации, то есть переход от системы векторов $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ к системе $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_k$ по следующим формулам:

$$\overline{b_1}=\overline{a_1},$$

$\overline{b_m} = \overline{a_m} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\overline{a_m} \cdot \overline{b_i}}{\overline{b_i}^2} \overline{b_i}$ для $m$ = 2, …, $k$ (в случае, когда формула дает нулевой вектор, он отбрасывается).

По этим формулам получаем:

$\boldsymbol{b}_1=(2,1,3,-1)$;

$\boldsymbol{b}_2=(7,4,3,-3) - \frac{(7,4,3,-3)\cdot(2,1,3,-1)}{(2,1,3,-1)^2}(2,1,3,-1) = (7,4,3,-3) -$

$-\frac{14+4+9+3}{4+1+9+1}(2,1,3,-1)=(7,4,3,-3) - 2(2,1,3,-1)=(3,2,-3,-1)$;

$\boldsymbol{b}_3=(1,1,-6,0) - \frac{(1,1,-6,0)\cdot(2,1,3,-1)}{(2,1,3,-1)^2}(2,1,3,-1) -$

$-\frac{(1,1,-6,0)\cdot(3,2,-3,-1)}{(3,2,-3,-1)^2}(3,2,-3,-1) = (1,1,-6,0) -$

$-\frac{2+1-18+0}{4+1+9+1}(2,1,3,-1) - \frac{3+2+18+0}{9+4+9+1}(3,2,-3,-1) =$

$= (1,1,-6,0) + (2,1,3,-1) - (3,2,-3,-1) = (0,0,0,0)$ –

этот вектор в базис не входит;

$\boldsymbol{b}_4= (5,7,7,8) - \frac{(5,7,7,8)\cdot(2,1,3,-1)}{(2,1,3,-1)^2}(2,1,3,-1) -$

$-\frac{(5,7,7,8)\cdot(3,2,-3,-1)}{(3,2,-3,-1)^2}(3,2,-3,-1) = (5,7,7,8) -$

$-\frac{10+7+21-8}{4+1+9+1}(2,1,3,-1) - \frac{15+14-21-8}{9+4+9+1}(3,2,-3,-1) =$

$= (5,7,7,8) - 2(2,1,3,-1) - 0(3,2,-3,-1) = (1,5,1,10)$.

Мы получили три ненулевых вектора: $\boldsymbol{b}_1=(2,1,3,-1)$, $\boldsymbol{b}_2=(3,2,-3,-1)$, $\boldsymbol{b}_4=(1,5,1,10)$. Проверим, что эти векторы попарно ортогональны:

$\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2=(2,1,3,-1)\cdot(3,2,-3,-1) = 6+2-9+1 = 0$;

$\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_4=(2,1,3,-1)\cdot(1,5,1,10) = 2+5+3-10 = 0$;

$\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_4= (3,2,-3,-1)\cdot(1,5,1,10) = 3+10-3-10 = 0$.

**Ответ**: ортогональный базис линейной оболочки данных векторов образуют векторы (2,1,3,–1), (3,2,–3,–1), (1,5,1,10).•

**Задание 11.**

*Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.*

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 16

| Вариант | **Квадратичная форма** |
|---|---|
| **1.** | $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$ |
| **2.** | $4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3-3x_2^2+4x_3^2$ |
| **3.** | $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$ |
| **4.** | $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-2x_3^2$ |
| **5.** | $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$ |
| **6.** | $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$ |
| **7.** | $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-2x_3^2$ |
| **8.** | $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$ |
| **9.** | $x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2$ |
| **10.** | $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_3^2$ |
| **11.** | $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+12x_2x_3+4x_3^2$ |
| **12.** | $4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3+5x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2$ |
| **13.** | $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+8x_2x_3+x_3^2$ |
| **14.** | $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2$ |
| **15.** | $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+12x_2x_3+7x_3^2$ |
| **16.** | $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+16x_2x_3+7x_3^2$ |
| **17.** | $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+10x_2x_3+4x_3^2$ |
| **18.** | $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$ |
| **19.** | $x_1^2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$ |
| **20.** | $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$ |
| **21.** | $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+2x_3^2$ |
| **22.** | $4x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2^2+2x_3^2$ |
| **23.** | $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$ |

| | |
|---|---|
| **24.** | $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-4x_3^2$ |
| **25.** | $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$ |
| **26.** | $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-x_3^2$ |
| **27.** | $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-4x_3^2$ |
| **28.** | $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3-x_3^2$ |
| **29.** | $x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$ |
| **30.** | $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-x_3^2$ |

**Пример**

Приведем методом Лагранжа к каноническому виду квадратичную форму $x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-x_2x_3+x_3^2$.

1. Выберем ведущую переменную – такую переменную, которая входит в квадратичную форму и в квадрате, и в произведении на другую переменную. Выберем, например, переменную $x_1$.

2. По ведущей переменной выделим полный квадрат:
$x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-x_2x_3+x_3^2 = [x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-$
$-(x_2-x_3)^2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2 = (x_1+x_2-x_3)^2+x_2x_3$.
Введем новые переменные: $y_1 = x_1+x_2-x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$. Тогда квадратичная форма примет вид $y_1^2+y_2y_3$.

3. В квадратичной форме $y_1^2+y_2y_3$ ведущую переменную выбрать уже нельзя: $y_1$ входит только в квадрате, а $y_2$ и $y_3$ – только в произведении на другую переменную.

4. Пару переменных, входящих в квадратичную форму в виде произведения, примем за сумму и разность новых переменных, а переменную, входящую в квадратичную форму в квадрате, сохраним: $y_1=z_1$, $y_2 = z_2+z_3$, $y_3 = z_2-z_3$. Тогда $y_1^2+y_2y_3 = z_1^2+(z_2+z_3)(z_2-z_3) = z_1^2+z_2^2-z_3^2$. Эта квадратичная форма не содержит произведений переменных, то есть имеет канонический вид.

**Ответ**: $z_1^2+z_2^2-z_3^2$.●

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Лань, 2010.
4. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Лань, 2008.

Учебно-методическое издание

Арутюнян Елена Бабкеновна
Родина Елена Викторовна

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания

Сдано в печать Тираж
Усл.-печ. л. Формат Цена
Изд. № Заказ

127994, Москва, ул. Образцова, 9, стр.9
Типография МИИТа

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

---

Кафедра «Прикладная математика-1»

Е.Б.Арутюнян, Е.В.Родина

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
# И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания
для студентов
направлений УВА, УЗС, УИС, УПИ, УЭМ

Москва – 2013